Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les circuits électriques sous l'angle du **filtre**. De façon plus précise, nous allons étudier la réponse (signal de sortie) d'un circuit soumis à une excitation sinusoïdale (signal d'entrée) suivant la fréquence de cette excitation. Nous introduirons ainsi des outils commodes que sont la **fonction de transfert** et **les diagrammes de Bode**. Les notions introduites dans ce chapitre sont très générales et s'appliquent dans d'autres domaines (mécanique, optique…). L'électronique est la science du traitement des signaux électriques, dont un des problèmes fondamentaux est d'extraire l'information utile d'un signal issu d'un capteur ou reçu d'un interlocuteur. Sur l'antenne de réception d'un téléphone portable par exemple, de multiples signaux se superposent.

Introduction

Certains sont des bruits générés par l'environnement, d'autres concernent des communications dont une seule est destinée à être reçue par l'utilisateur du téléphone. Une des tâches importantes en électronique des télécommunications consiste donc à séparer la partie utile, celle qui transporte l'information de partie parasite. De même qu'un filtre coloré permet de sélectionner des composantes de lumière sur la base d'un critère de teinte, **un filtre électronique amplifie ou atténue les composantes d'un signal selon leur fréquence.**

> Un filtre est un système qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel.

On trouve des filtres dans un peu près tous les appareils électroniques qui nous entourent : les téléphones, les radios, les télévisions, les ordinateurs etc…

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (1)

C'est en étudiant **l'écoulement de la chaleur** que Fourier découvrit qu'une fonction périodique non-sinusoïdale peut être exprimée comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales. Rappelons qu'une fonction périodique dans le temps se répète toutes les T secondes. Une fonction $f(t)$ périodique vérifie

$$\boxed{f(t) = f(t + nT) \text{ avec } n \text{ entier (fonction périodique)}}$$

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (2)

D'après le théorème de Fourier, toute fonction périodique (satisfaisant certains critères de continuités etc…) de pulsation (ou fréquence angulaire) ω_0 peut être exprimée comme une somme infinie de sinus et de cosinus dont les pulsations sont des multiples entiers de ω_0 . Ainsi $f(t)$ peut s'écrire :

Série de Fourier d'un signal périodique

$$f(t) = \begin{cases} \underbrace{a_0}_{\text{valeur moyenne ou composante continue : dc}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right]}_{\text{partie harmonique (ou alternative) : ac}} \\ \Updownarrow \\ \underbrace{a_0}_{\text{valeur moyenne ou composante continue : dc}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)\right]}_{\text{partie harmonique (ou alternative) : ac}} \end{cases}$$

ω_0 est **la pulsation du fondamental**

$\omega_n = n\omega_0$ est **la pulsation de l'harmonique** de rang n

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (3)

Les coefficients a_0, a_n et b_n sont réels et peuvent être calculés à partir des expressions suivantes :

Calcul des coefficients de la série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \phi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (4)

Cette décomposition signifie que les fonctions $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ constituent une base orthogonale de l'espace des fonctions considérées, vérifiant pour n et m entiers :

$$\forall\, n, m, \int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\, dt = 0$$

$$\forall\, n \neq m, \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\, dt = \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\, dt = 0$$

$$\forall\, n \neq 0, \qquad \int_0^T \cos^2(n\omega t)\, dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t)\, dt = \frac{T}{2}$$

On démontre qu'il existe une relation simple entre le carré de la valeur efficace d'un signal périodique, S_{eff}^2 et les carrés des coefficients de la série de Fourier du signal :

$$\boxed{\boldsymbol{S_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2 + b_n^2\right]}}$$

Théorème de Parseval

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (5)

On considère l'exemple de la fonction périodique suivante.

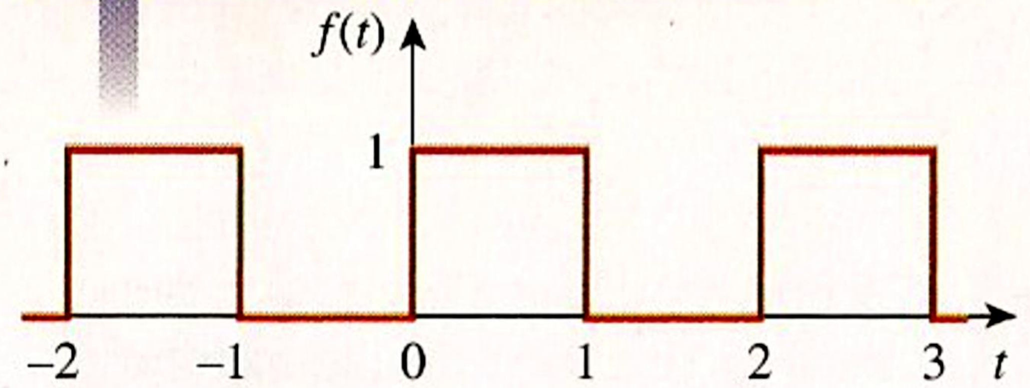


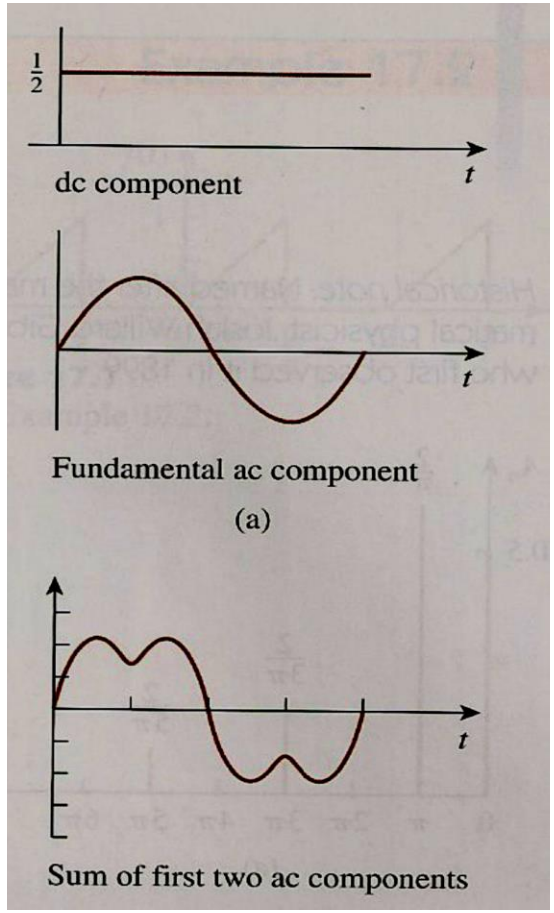
Figure 17.1
For Example 17.1; a square wave.

On montre que sa série de Fourier s'écrit :

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\left(\pi t\right)+\frac{2}{3\pi}\sin\left(3\pi t\right)+\frac{2}{5\pi}\sin\left(5\pi t\right)+\ldots$$

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (6)

Les figures suivantes montrent l'allure du signal lorsque que l'on ajoute successivement les termes de la série de Fourier. Avec seulement les 5 premiers termes de la série, on commence à avoir la forme d'un signal périodique carré.



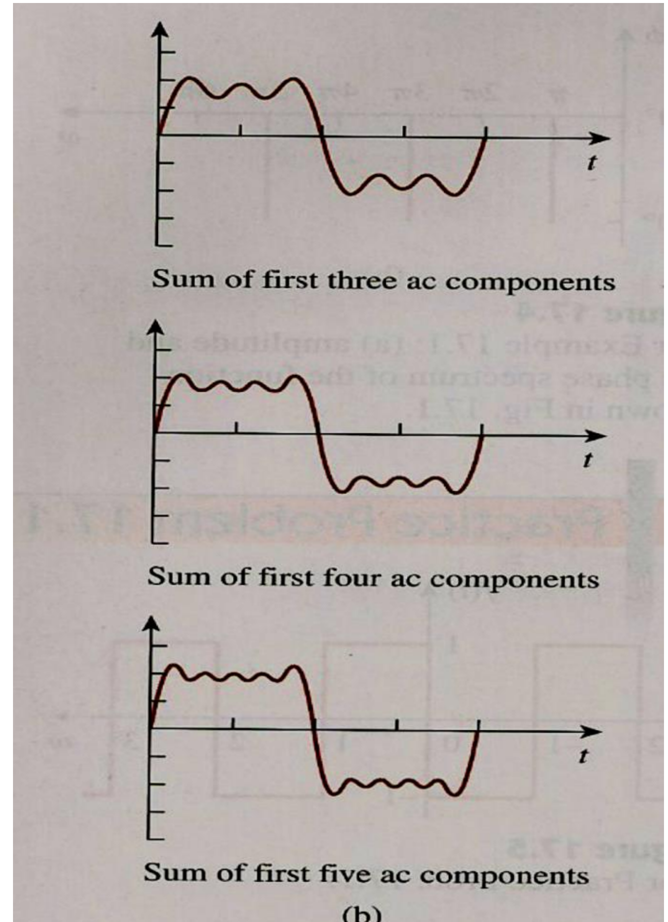


Figure 17.2
Evolution of a square wave from its Fourier components.

Analyse de Fourier d'un signal sinusoïdal (7)

Avec 11 termes, nous sommes proches du signal carré.

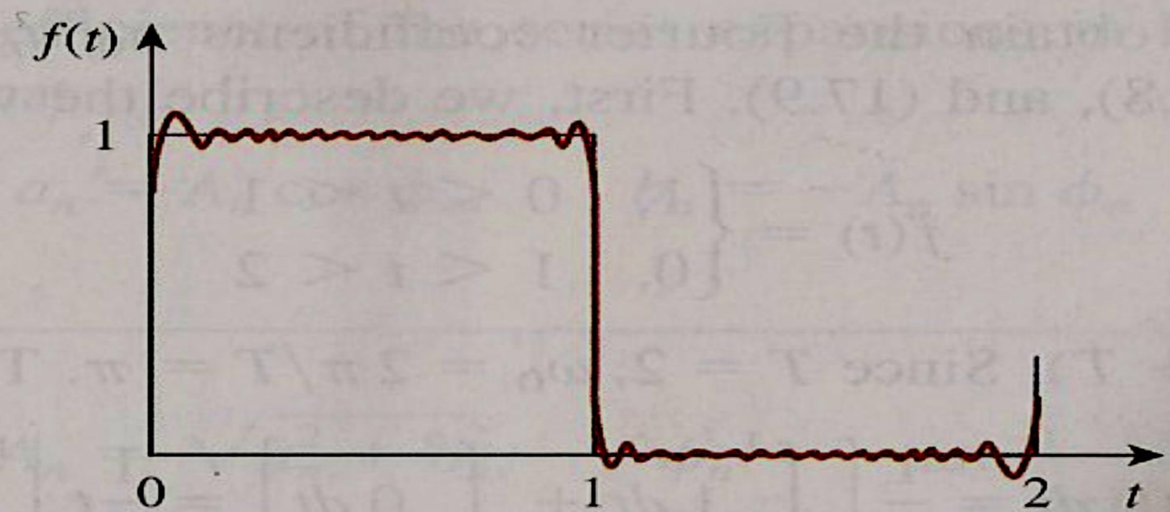
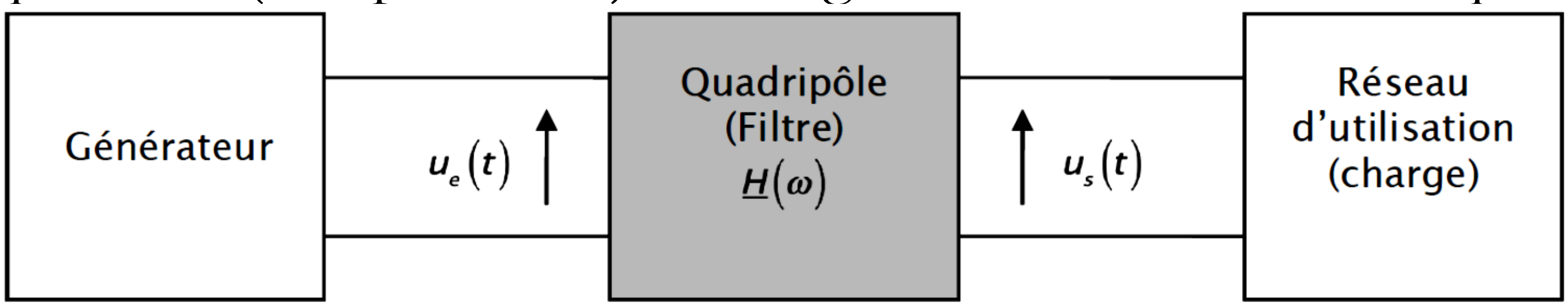


Figure 17.3
Truncating the Fourier series at $N = 11$;
Gibbs phenomenon.

Fonction de transfert (1)

- Un **filtre** est un système dont le signal de sortie (réponse) diffère du signal d'entrée (excitation).
- Un filtre est **linéaire** si l' équation différentielle traduisant l'effet du filtre et liant la sortie $s(t)$ du filtre à l'entrée $e(t)$ est linéaire.
- Lorsqu'un filtre linéaire est soumis à une entrée égale à une somme de signaux sinusoïdaux, sa réponse est la somme des réponses du filtre à chaque signal.
- Un filtre est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences (ou pulsation) du signal d'entrée harmonique (sinusoïdal).



Fonction de transfert (2)

Soit un réseau linéaire excité par une entrée sinusoïdale de pulsation ω. L'entrée notée $e(t)$ qui peut être un courant ou une tension provoque une réponse forcée du réseau. Nous notons $s(t)$ cette réponse. On a donc :

$$e(t) = E\,cos(\omega t + \varphi_e) \qquad ; \qquad s(t) = S\,cos(\omega t + \varphi_s)$$

$$e(t) = E\,cos(\omega t + \varphi_e) \Longrightarrow \underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi_e)} = Ee^{j\varphi_e}e^{j\omega t} = \underline{E}e^{j\omega t}$$

$$s(t) = S\,cos(\omega t + \varphi_s) \Longrightarrow \underline{s}(t) = Se^{j(\omega t+\varphi_s)} = Se^{j\varphi_s}e^{j\omega t} = \underline{S}e^{j\omega t}$$

La fonction de transfert est définie par :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}}$$

Fonction de transfert (3)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \Longrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}e^{j\omega t}}{\underline{E}e^{j\omega t}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{Se^{j\varphi_s}}{Ee^{j\varphi_e}} = \frac{S}{E}e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{S}{E}e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = \left|\underline{H}(j\omega)\right|e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = \left|\underline{H}(j\omega)\right|e^{j\varphi} = G(\omega)e^{j\varphi}$$

Le module ou encore le gain de la fonction de transfert est donc :

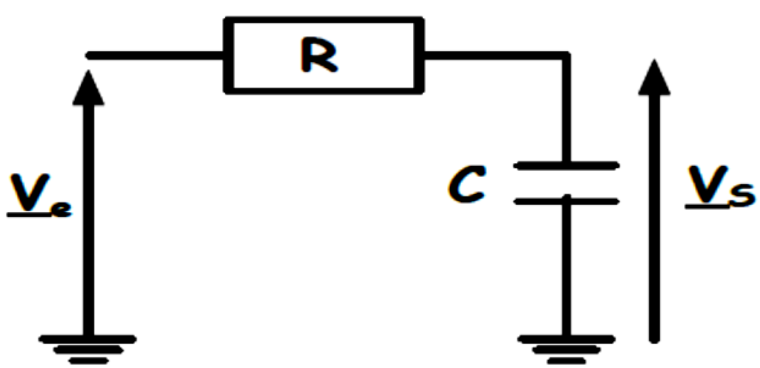
$$\boxed{\boldsymbol{G(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{S}{E}}}$$

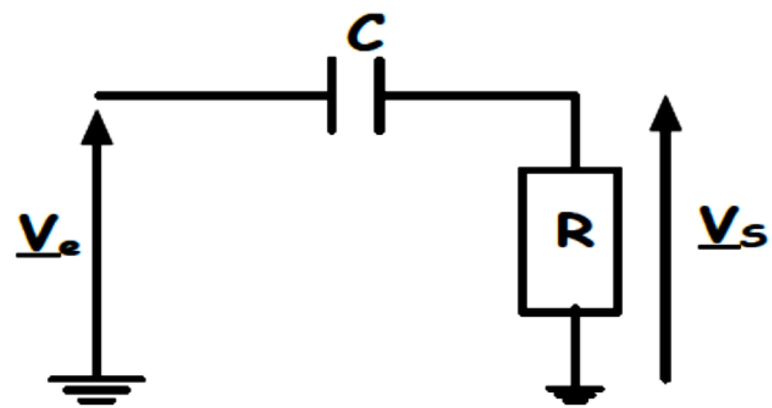
Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée :

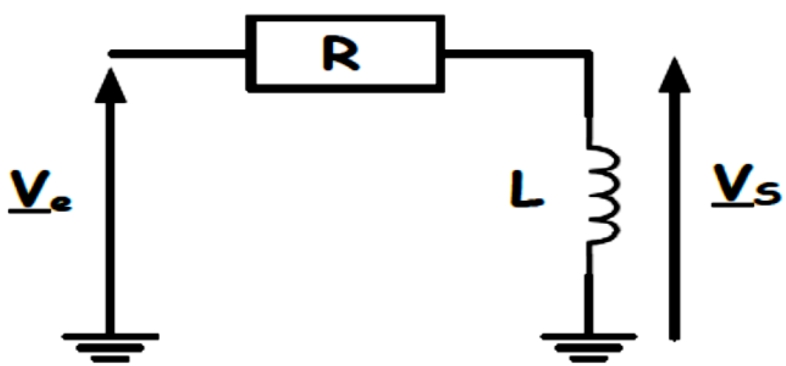
$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{arg\,\underline{H}(j\omega) = \varphi = \varphi_s - \varphi_e} \\ \boldsymbol{-\pi < \varphi \leq \pi} \end{array}}$$

Fonction de transfert (4)

Déterminer la fonction de transfert pour les circuits suivants :







Fonction de transfert (5)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \qquad \varphi = -arc\tan RC\omega$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - arc\tan RC\omega$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - arc\tan \frac{L\omega}{R}$$

Ordre d'un filtre (1)

La fonction de transfert complexe peut toujours s'écrire comme le rapport de 2 polynômes en $j\omega$:

$$\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\underline{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{j\omega})}{\underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{j\omega})}$$

Pour des raisons de stabilité du filtre, le degré du polynôme $\underline{N}(j\omega)$ au numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ au dénominateur.

On appelle ordre du filtre le degré du polynôme $\underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{j\omega})$ situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega})$.

Ordre d'un filtre (2)

Application : la fonction de transfert du filtre RC est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert est : $\underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{j\omega}) = 1 + jRC\omega$. C'est un polynôme du premier ordre en $j\omega$: le filtre est donc du premier ordre.

Gain en décibel (1)

Le gain $\boldsymbol{G_{dB}}$ de la fonction de transfert (en dB) est définie par :

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{G_{dB} = 20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right|}}}$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \qquad \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a \qquad \log(a^n) = n\log a$$

- ❑ $\log(2) = 0{,}3$; $\log(3) = 0{,}5$

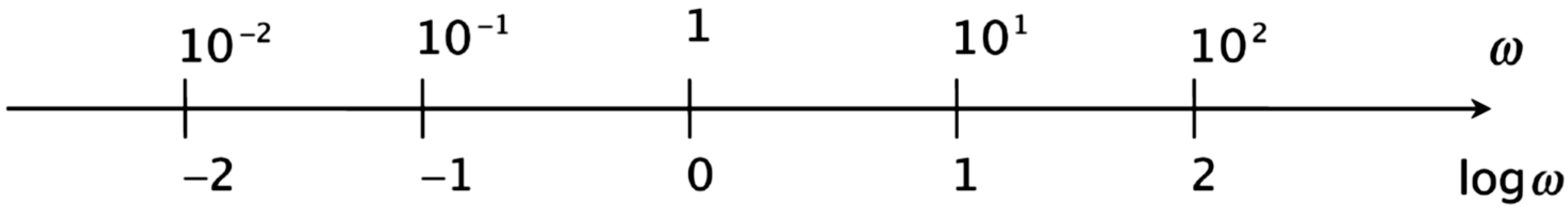
- ❑ Si on divise $G(\omega)$ par $\sqrt{2}$, en décibel on obtient

$$20\log\frac{G(\omega)}{\sqrt{2}} = 20\log G(\omega) - 10\log 2 = 20\log G(\omega) - 3\text{dB}$$

Cela revient à retrancher 3 au gain en décibel

Gain en décibel (2)

- Un changement d'un ordre de grandeur en ω correspond seulement à un changement de une unité en $\log \omega$. Ainsi, en échelle log, on peut représenter des variations de ω bien plus importantes qu'en échelle linéaire.

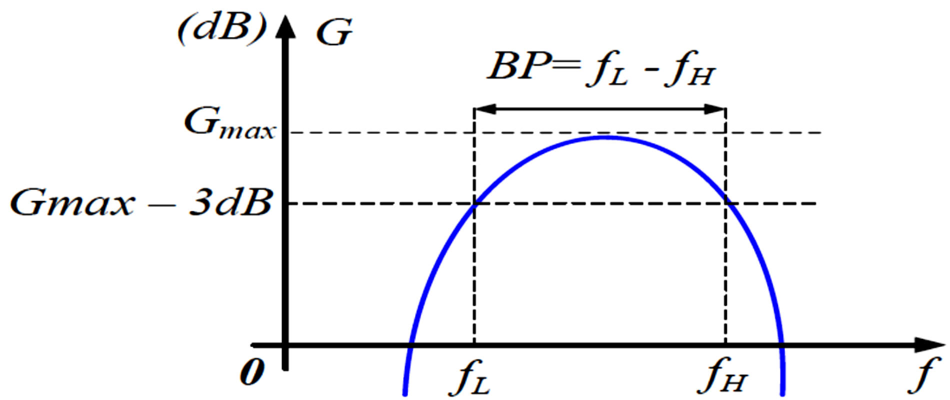


- $G_{dB} > 1$: le filtre est amplificateur
- $G_{dB} < 1$: le filtre est atténuateur
- $G_{dB} = 1$: le filtre est passeur.

Fréquence de coupure à -3 dB

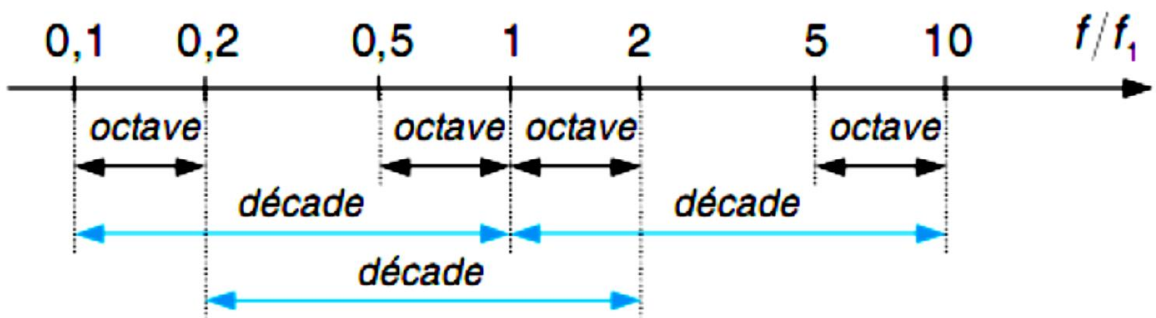
les fréquences de coupure dites à $-3dB$ sont les fréquences pour lesquelles le module $H = |\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert est égal au module maximal divisé par $\sqrt{2}$. Ce qui correspond à la puissance maximale du signal divisée par 2. Soit :

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{|\underline{H}(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}}$$



Octave et décade

- Une octave est l'intervalle entre 2 fréquences f_1 et f_2 tel que $f_2 = 2f_1$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle a pour longueur $\log(2)$. En effet : $\log(2f) - \log(f) = \log(2)$
- Une décade est l'intervalle entre 2 fréquences f_1 et f_2 tel que $f_2 = 10f_1$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle est l'intervalle de longueur 1 (intervalle unité). En effet : $\log(10f) - \log(f) = \log(10) = 1$



- Pente d'une droite : dans la représentation du gain en tension en fonction de $\log(f)$, **la pente d'une droite est calculée en dB/décade**.

Diagramme de BODE (1)

Nom donné en l'honneur de **Hendrik W. Bode** (1905-1982), un ingénieur des célèbres laboratoires de la compagnie américaine Bell Téléphone, pour son travail de pionnier dans ce domaine dans les années 1930-1940.

Diagramme de BODE (2)

C'est une représentation en échelle logarithmique. **C'est le tracé de deux courbes :**

- ❑ Le gain G_{dB} de la fonction de transfert complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence ou de la pulsation (échelle logarithmique) :

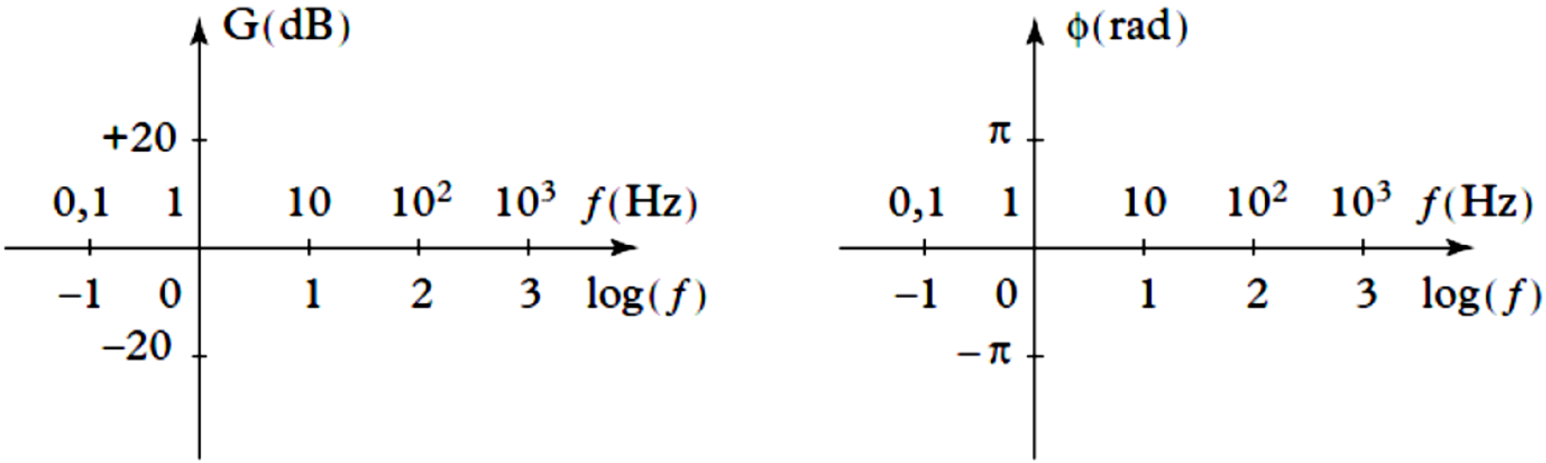
$$\boxed{G_{dB} = f\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]}$$

- ❑ Le déphasage φ de la fonction de transfert complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence ou de la pulsation (échelle logarithmique) :

$$\boxed{\phi = g\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]}$$

Diagramme de BODE (3)

- Le tracé se fait sur du papier semi-logarithmique.



- Le diagramme de Bode du produit de deux fonctions de transfert est la somme des diagrammes de Bode pour chaque fonction de transfert :

$$\boxed{\begin{cases} G_{dB} = G_{1\,dB} + G_{2\,dB} \\ \phi = \phi_1 + \phi_2 \end{cases}}$$

Diagramme de BODE (4)

- Dans un diagramme de Bode, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade.
- 20 dB/décade est l'unité élémentaire de pente.
- Une pente de 20 dB/décade est une pente $+1$.
- Une pente de - 20 dB/décade est une pente -1
- Une pente de n $\times$20 dB/décade est une pente $+n$
- Une pente de $-n$ $\times$20 dB/décade est une pente $-n$

Équation différentielle et fonction de transfert

la fonction de transfert d'un filtre n'est rien d'autre, en représentation complexe, que l'équation différentielle qui relie $u_S(t)$ et $u_e(t)$. On déduit l'une de l'autre en se souvenant de la substitution :

$$j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \ldots + a_n(j\omega)^n}{a'_0 + a'_1(j\omega) + a'_2(j\omega)^2 + \ldots + a'_n(j\omega)^n},$$

$$\updownarrow$$

$$a'_0 u_s(t) + a'_1 \frac{du_s(t)}{dt} + a'_2 \frac{d^2u_s(t)}{dt^2} + \ldots + a'_n \frac{d^nu_s(t)}{dt^n} = a_0 u_e(t) + a_1 \frac{du_e(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2u_e(t)}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^nu_e(t)}{dt^n}$$

Étude Physique des filtres (1)

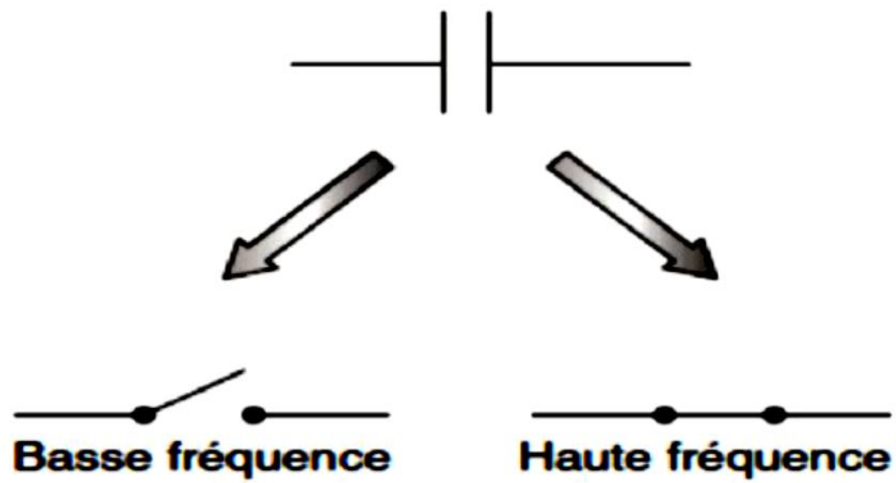
On peut étudier physiquement la nature d'un filtre composé uniquement de composants usuels (R,L,C) en analysant leurs comportements aux basses fréquences (BF) et aux hautes fréquences (HF). Pour les dipôles fondamentaux (condensateurs, bobines) les comportements asymptotiques sont déterminés comme suit :

❑ Condensateur

L'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $\left|\underline{Z}_C\right| \longrightarrow \infty$
- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $\left|\underline{Z}_C\right| \longrightarrow 0$



Le condensateur se comporte aux *BF* comme un interrupteur ouvert et aux *HF* comme un court-circuit (fil).

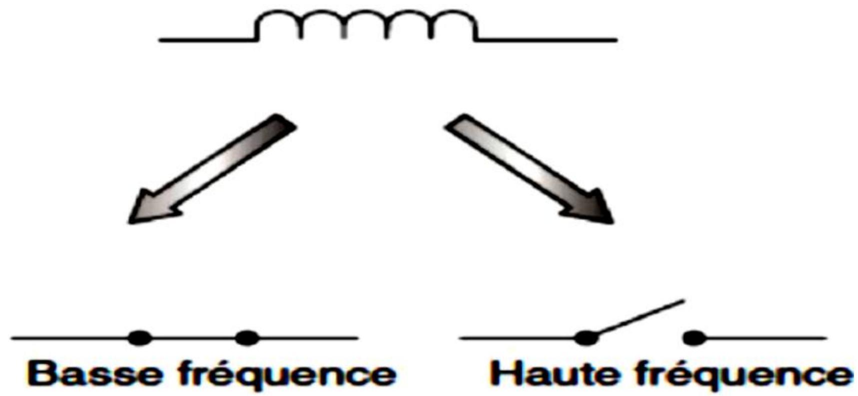
Étude Physique des filtres (2)

❑ Bobine

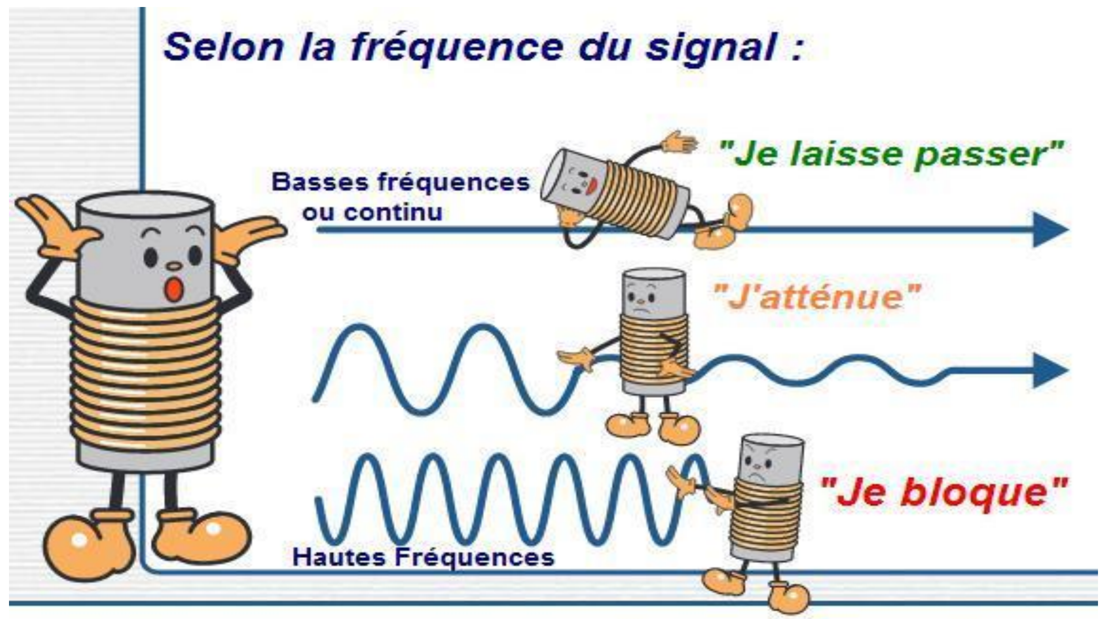
L'impédance de la bobine vaut :

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow 0$
- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow \infty$



Une bobine se comporte aux BF comme un court-circuit (fil) et aux HF comme un interrupteur ouvert.



Différents types de filtres (1)

- **Un filtre passe-bas** laisse passer les signaux sinusoïdaux de basses fréquences et coupe les signaux sinusoïdaux de hautes fréquences.
- **Un filtre passe-haut** laisse passer les signaux sinusoïdaux de hautes fréquences et coupe les signaux sinusoïdaux de basses fréquences.
- **Un filtre passe-bande** laisse passer les signaux sinusoïdaux dont la fréquence est comprise dans un intervalle (bande) de fréquences et coupe les autres.
- **Un filtre coupe-bande** coupe les signaux sinusoïdaux dont la fréquence est comprise dans un intervalle (bande) et laisse passer les autres.

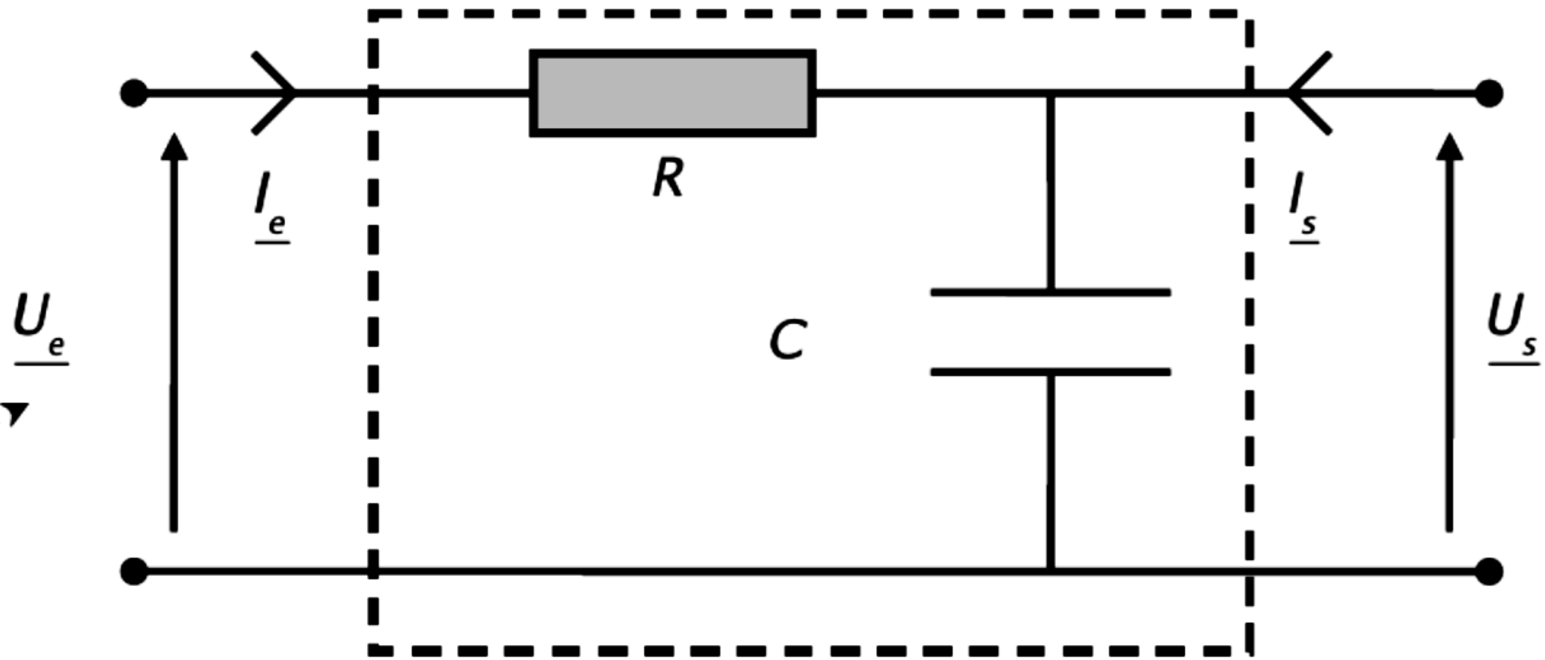
≪laisse passer≫ = amplifie ou atténue peu *≪Coupe≫ = atténue fortement*

Différents types de filtres (2)

- **Un filtre toute-bande** ou **passe-tout** ou **déphaseur** n'agit pas sur l'amplitude et laisse passer tous les signaux, mais déphase le signal de sortie par rapport au signal d'entrée en fonction de sa fréquence.
- **Un filtre passif** ne contient que des dipôles passifs R , L et C .
- **Un filtre actif** contient des éléments actifs alimentés par des sources extérieures d'énergie ; pour nous il s'agira uniquement des amplificateurs opérationnels.
- **Un filtre du premier ordre** est un filtre dont l' équation différentielle est du premier ordre.
- **Un filtre du second ordre** est un filtre dont l' équation différentielle est du second ordre.

Filtres du 1er Ordre

Filtre passe-bas RC (1)



Amplitude complexe associée à la tension sinusoïdale d'entrée : **Excitation**

Amplitude complexe associée à la tension sinusoïdale de sortie : **Réponse**

Filtre passe-bas RC (2)

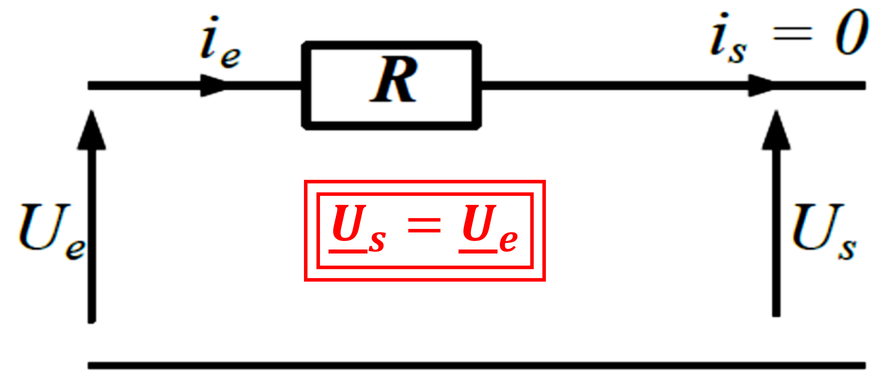
❑ Comportement asymptotique

L'impédance du condensateur vaut :

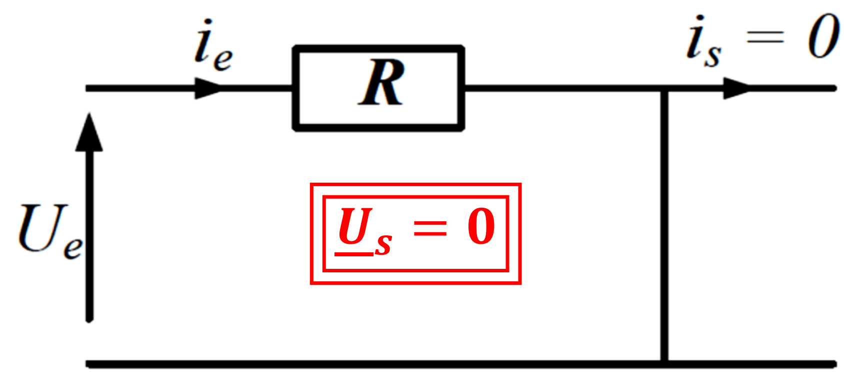
$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

on a pour circuit équivalent :

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow \infty$



- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$



On peut donc dire que le filtre transmet les signaux de basses fréquences et atténue ceux de hautes fréquences d'où la dénomination passe-bas.

Filtre passe-bas RC (3)

❑ Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = 1/RC$, il vient :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

En introduisant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ ou la fréquence réduite $x = f/f_0$, il vient :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}}$$

Ecriture canonique de la fonction de transfert d'un **filtre passe-bas de 1er ordre:**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jx}}$$

Filtre passe-bas RC (4)

❑ Diagramme de Bode du gain en dB

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Longrightarrow H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\underline{H}(j\omega)\right| \Longrightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow G_{dB} = 20\log_{10} 1 - 20\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2} = 0 - 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

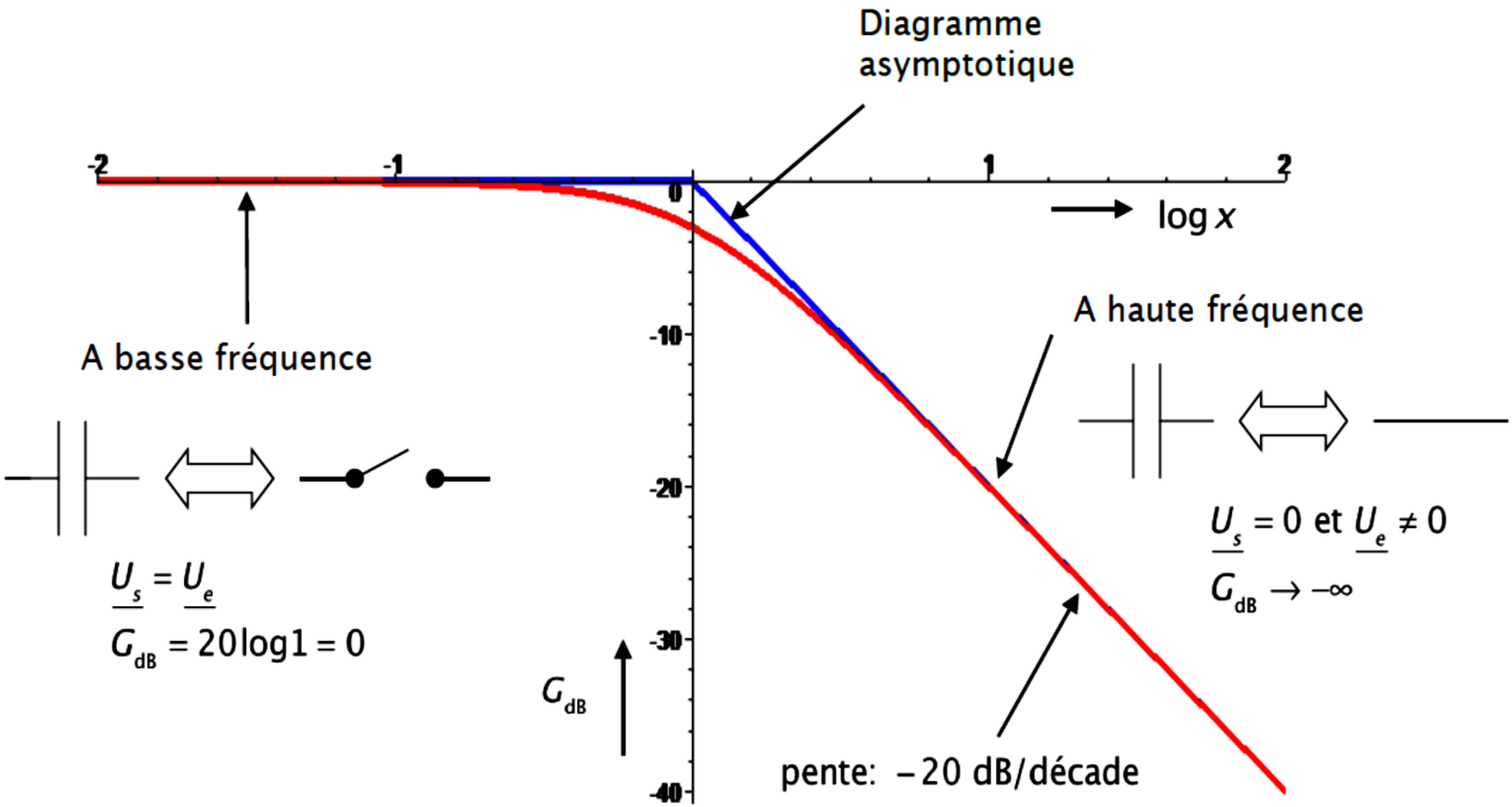
$$\boxed{G_{dB} = -10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

Filtre passe-bas RC (5)

On représente le gain en décibel non pas en fonction de ω/ω_0 mais en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$.

- Si $\omega \ll \omega_0$ alors $G_{dB} \cong 0$ on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $G_{dB} \cong -20\log(\omega/\omega_0)$ on a donc une droite de pente $-20\ dB$ par décade ce qui signifie que si ω est multiplié par 10, $\log(\omega/\omega_0)$ augmente de 1 et G_{dB} diminue de $20\ dB$ ou encore à chaque fois que l'on avance d'une décade, on descend de $20\ dB$.
- Si $\omega = \omega_0$ alors $G_{dB} = -3\text{dB}$

Filtre passe-bas RC (6)



Filtre passe-bas RC (7)

ω_0 est appelé pulsation de coupure à $-3\ dB$ et notée ω_C

La pulsation de coupure à $-3\ dB$ du filtre est par définition la pulsation telle que : $G_{dB}(\omega_c) = -3\ dB$. C'est la limite entre le comportement BF et HF du filtre.

- Les signaux de pulsation $\boldsymbol{\omega < \omega_c}$ sont transmis en sortie avec une atténuation inférieure à $-3\ dB$.
- Les signaux de pulsation $\boldsymbol{\omega > \omega_c}$ sont transmis en sortie avec une atténuation supérieure à $3\ dB$.
- **La bande passante de ce filtre c'est-à-dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer est donc : $[\mathbf{0}; \boldsymbol{\omega_0}]$**.

Filtre passe-bas RC (8)

❑ Diagramme de Bode de la phase

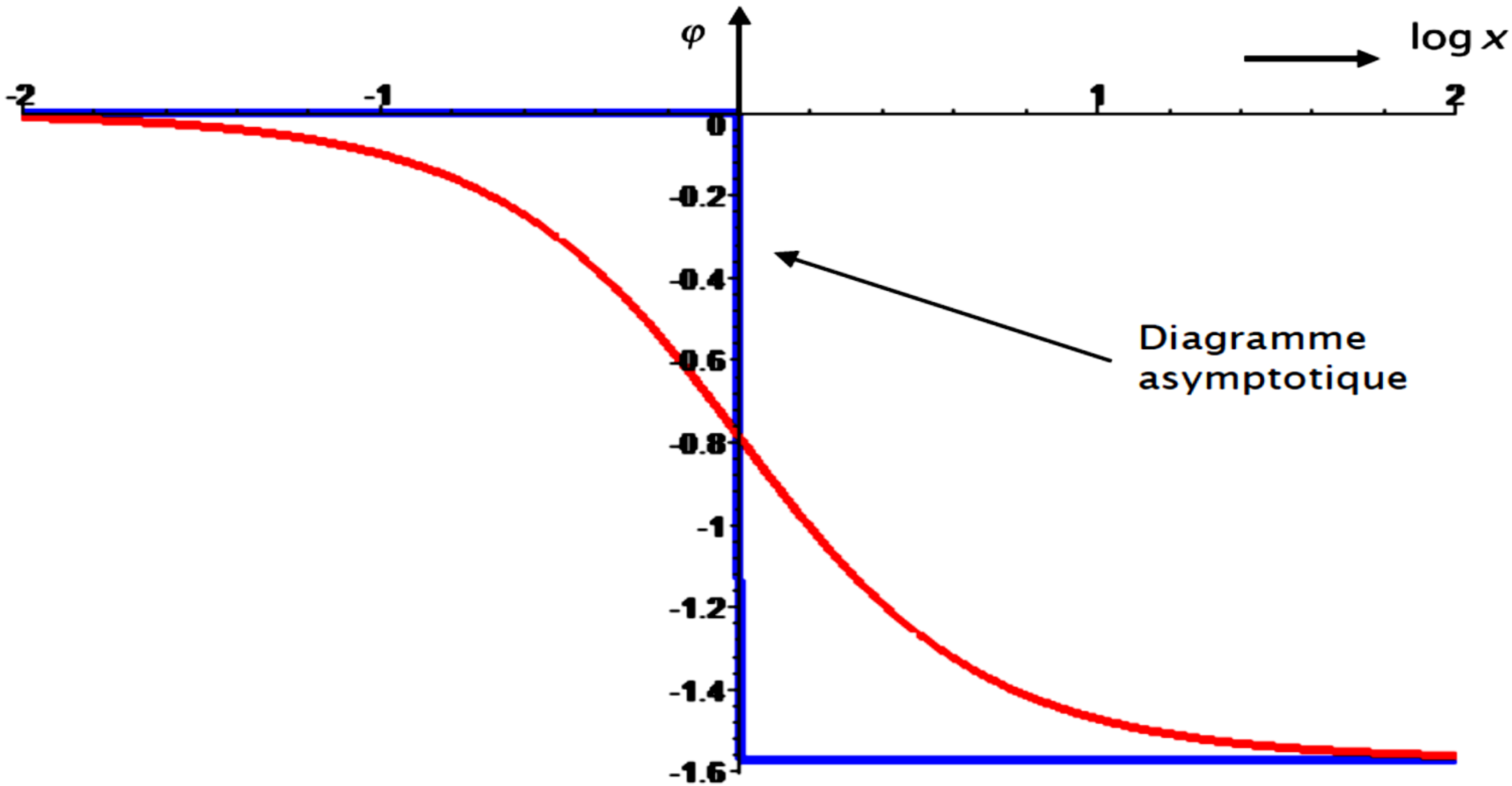
L'argument de la fonction de transfert est appelé phase.

$$\phi = arg\underline{H}(j\omega) = arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = arg\,(1) - arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\phi = -arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

- Si $\ll \omega_0$, alors $\phi \cong 0$: on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $\phi \cong -\pi/2$: on a donc une demi-droite horizontale d'ordonnée $-\pi/2$
- Si $\omega = \omega_0$ alors $\phi \cong -\pi/4$

Filtre passe-bas RC (9)



Filtre passe-bas RC (10)

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

Le dénominateur est la somme de deux termes, 1 et $jRC\omega$. À quelle condition l'un est-il prédominant devant l'autre en module ? 1 est beaucoup plus petit que $RC\omega = |jRC\omega|$ dès que :

$$1 \ll \frac{\omega}{\omega_0} \leftrightarrow \omega \gg \omega_0$$

Domaine de Pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Numérateur	1	1	1
Dénominateur	1	$1+j$	$j\frac{\omega}{\omega_0}$
$\underline{H}(j\omega)$	1	$\frac{1}{1+j}$	$\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$
$G_{dB} = 20\log\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert$	0	$-3\,dB$	$-20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
Pente pour G_{dB}	demi-droite confondue avec l'axe des abscisses		$-20dB/décade$
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
Pente pour φ	demi-droite confondue avec l'axe des abscisses		demi-droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$

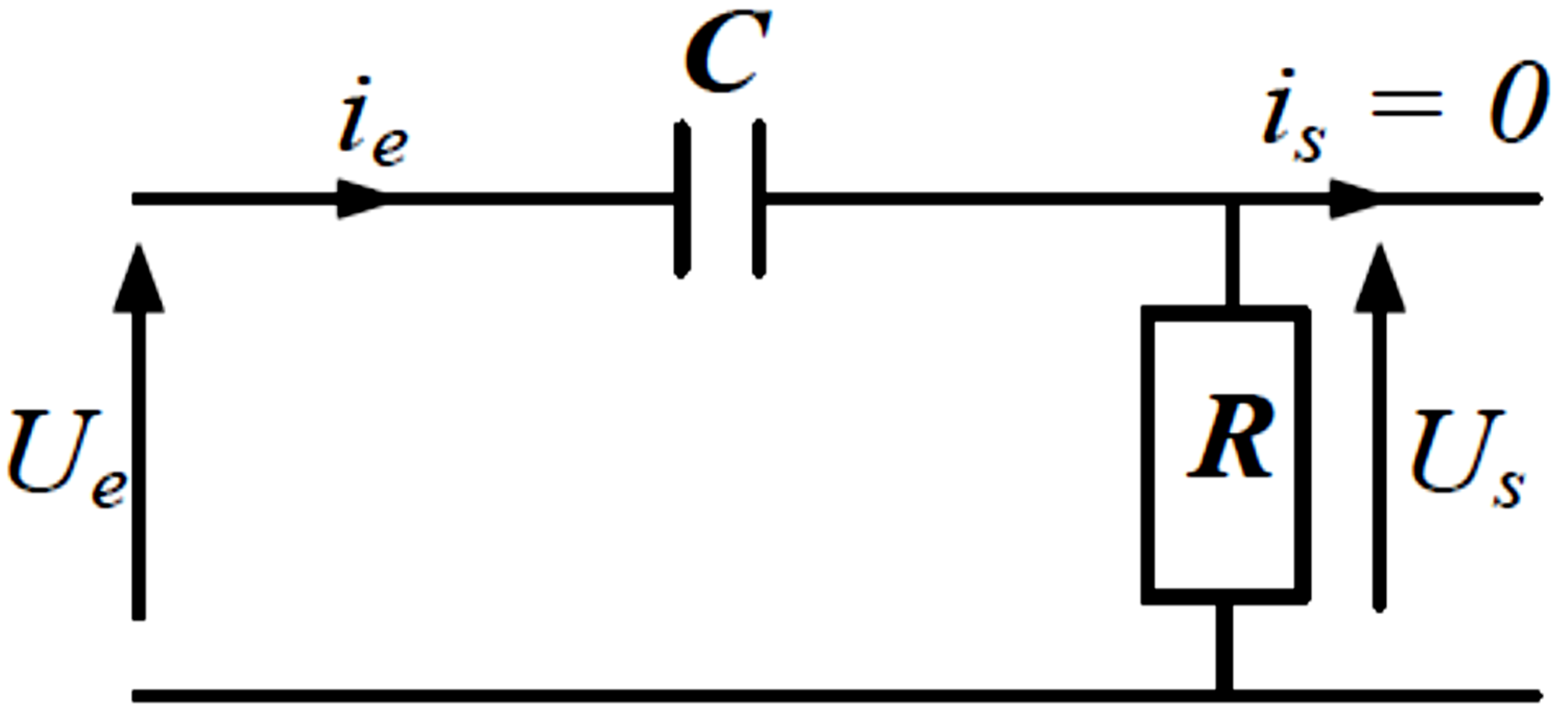
Filtre passe-bas RC (11)

En HF $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \dfrac{\omega_0}{j\omega}\underline{u}_e \Rightarrow j\omega\underline{u}_s = \omega_0\,\underline{u}_e$

$$\Rightarrow \frac{du_s}{dt} = \omega_0\, u_e \Rightarrow \boxed{u_s(t) = \frac{1}{RC}\int u_e(t)dt}$$

On constate que le filtre réalise l'intégration du signal d'entrée, on a donc un **intégrateur**. Si on envoie à l'entrée du filtre un signal créneau de haute fréquence, on obtient à la sortie un signal triangle. Attention, il ne faut pas oublier que la notion de fonction de transfert et l'utilisation de la représentation complexe ne sont valables que pour les signaux sinusoïdaux.

Filtre passe-haut CR (1)



Filtre passe-haut CR (2)

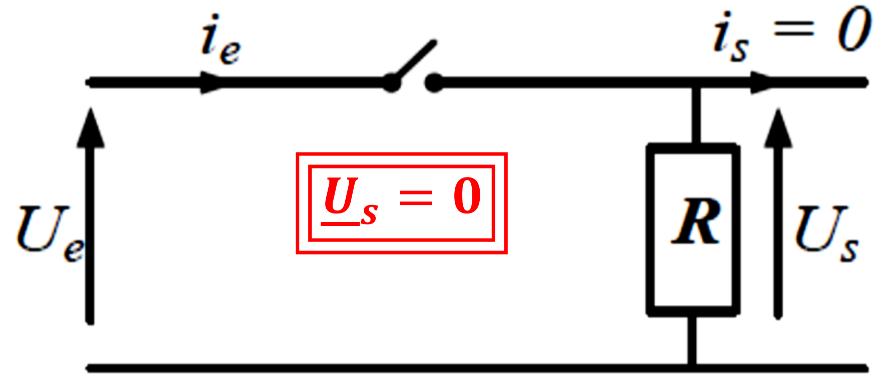
❑ Comportement asymptotique

L'impédance du condensateur vaut :

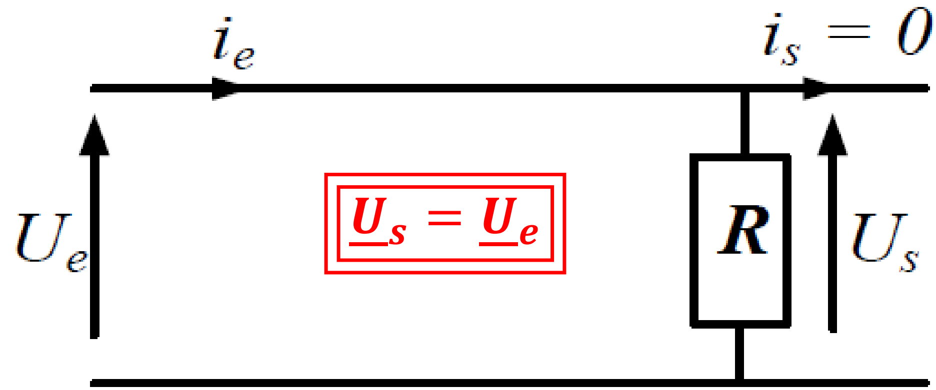
$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow \infty$

on a pour circuit équivalent :



- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$



On peut donc dire que le filtre transmet les signaux de hautes fréquences et atténue ceux de basses fréquences d'où la dénomination passe-haut.

Filtre passe-haut CR (3)

❑ Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = 1/RC$, il vient :

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_0}}{1 + \boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_0}}}$$

En introduisant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ ou la fréquence réduite $x = f/f_0$, il vient :

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{\boldsymbol{jx}}{1 + \boldsymbol{jx}}}$$

Ecriture canonique de la fonction de transfert **d'un filtre passe-haut de 1er ordre:**

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{H}_0 \frac{\boldsymbol{jx}}{1 + \boldsymbol{jx}}}$$

Filtre passe-haut CR (4)

❑ Diagramme de Bode du gain en dB

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Longrightarrow H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

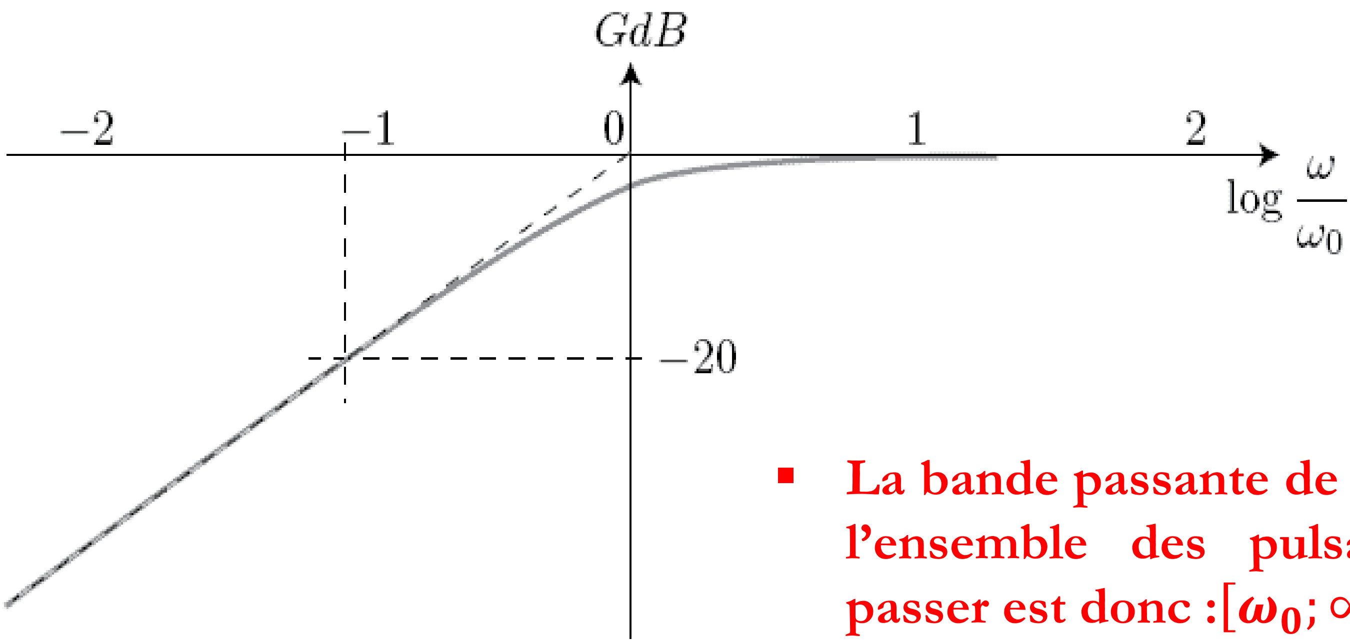
$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\underline{H}(j\omega)\right| \Longrightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\boxed{G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

Filtre passe-haut CR (5)

- Si $\omega \ll \omega_0$ alors $G_{dB} \cong 20\log_{10}(\omega/\omega_0)$ on a donc une droite de pente $20\ dB$ par décade ce qui signifie qu'on monte de $20\ dB$ lorsqu'on avance d'une décade ou encore lorsqu'on recule d'une décade, on descend de $20\ dB$.
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $G_{dB} \cong 0$ on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega = \omega_0$ alors $G_{dB} = -3\text{dB}$



- **La bande passante de ce filtre c'est-à-dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer est donc :$[\omega_0; \infty[$.**

Filtre passe-haut CR (6)

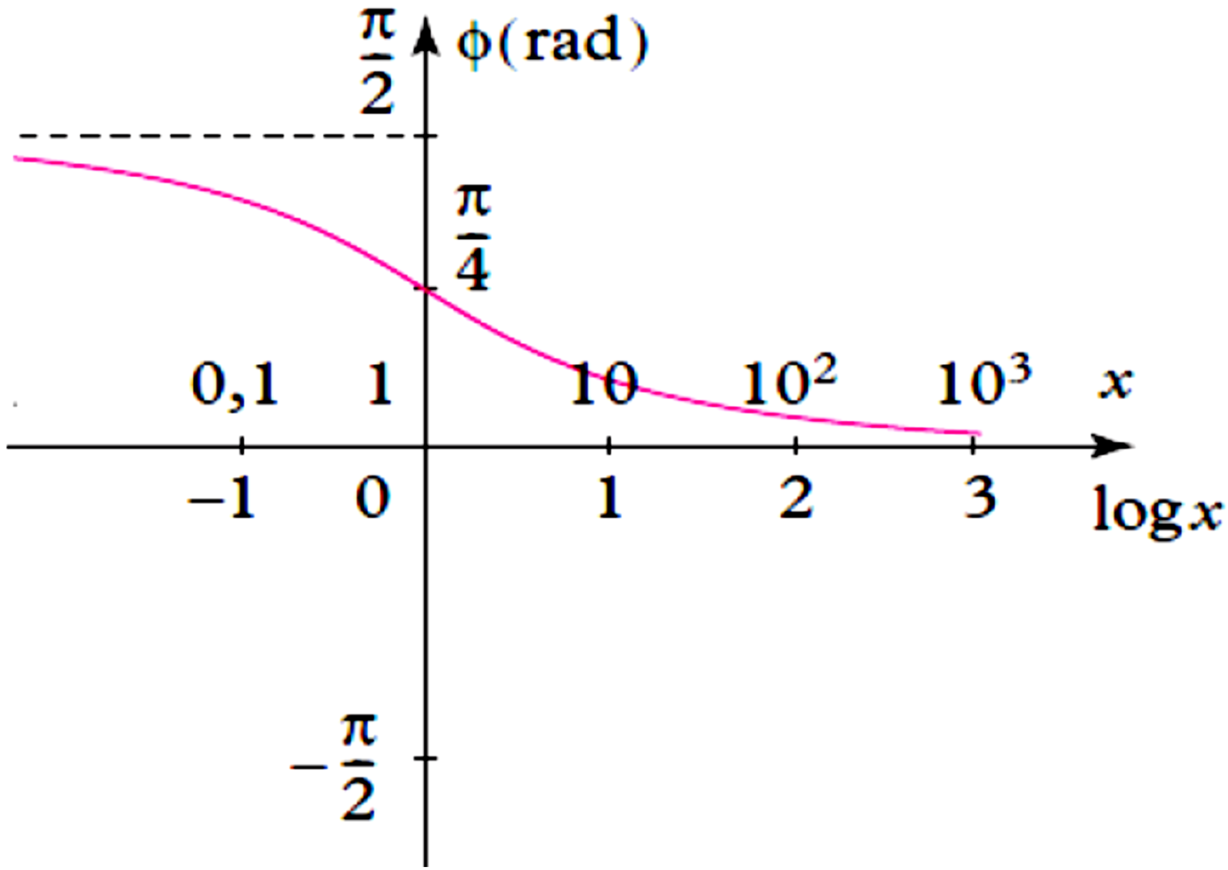
❑ Diagramme de Bode de la phase

$$\phi = arg\underline{H}(j\omega) = arg\left(\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\phi = \frac{\pi}{2} - arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

- Si $\ll \omega_0$, alors $\phi \cong -\pi/2$: on a donc une demi-droite horizontale d'ordonnée $\pi/2$
- Si $\omega \gg \omega_0$ alors $\phi \cong 0$:on a donc une demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
- Si $\omega = \omega_0$ alors $\phi \cong \pi/4$

Filtre passe-haut RC (7)



Cette courbe se déduit de celle du passe-bas par une translation de $\pi/2$.

Filtre passe-haut CR (8)

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

Domaine de Pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Numérateur	$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$	j	$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$
Dénominateur	1	$1+j$	$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$
$\underline{H}(j\omega)$	$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$	$\dfrac{j}{1+j}$	1
$G_{dB} = 20\log\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert$	$20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	$-3\,dB$	0
Pente pour G_{dB}	$-20dB/décade$		demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
φ	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	0
Pente pour φ	demi-droite d'ordonnée $\dfrac{\pi}{2}$		demi-droite confondue avec l'axe des abscisses

Filtre passe-haut CR (9)

En Basses Fréquences

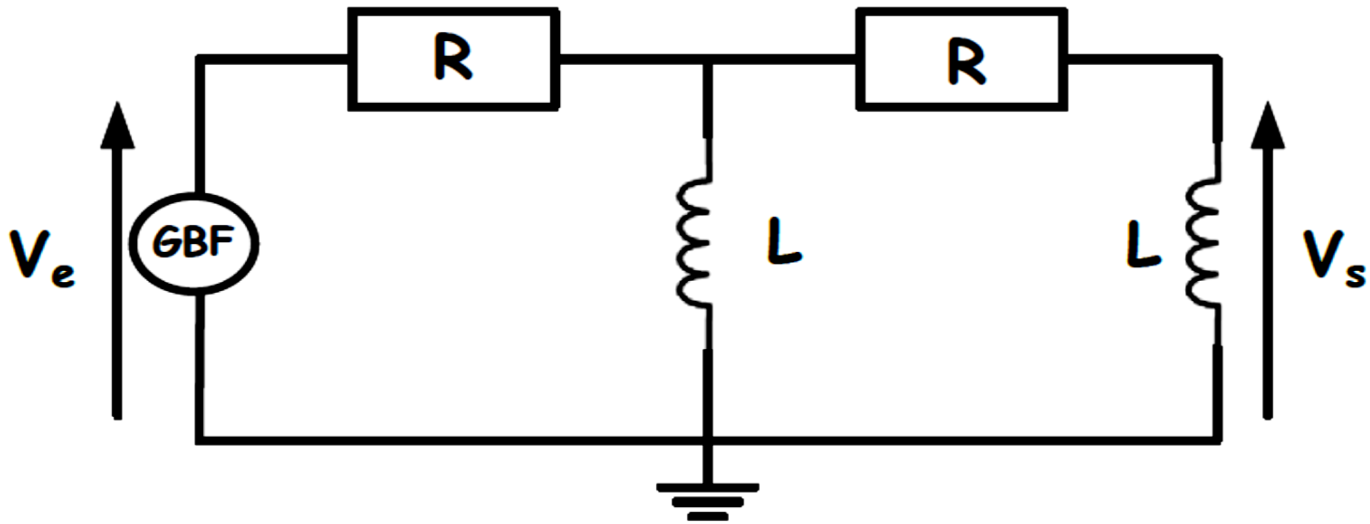
$$\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{u}_e \Rightarrow \underline{u}_s = \frac{1}{\omega_0} j\omega\,\underline{u}_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_s = \frac{1}{RC}\frac{du_e}{dt}}}$$

On constate que le filtre réalise la dérivation du signal d'entrée, on a donc un **dérivateur.**

Exercice d'application (1)

On s'intéresse au quadripôle de la figure ci-dessous formé de deux cellules (R,L) enchainées, alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation.



1) Déterminer la nature du filtre à partir de son comportement asymptotique.
2) En utilisant le théorème de Millman, déterminer la fonction de transfert en tension $\underline{H}(jx)$ où $x = L\,\omega/R$, Préciser la pulsation de coupure.

Exercice d'application (2)

1) La nature du filtre: filtre passe-haut

2) La fonction de transfert

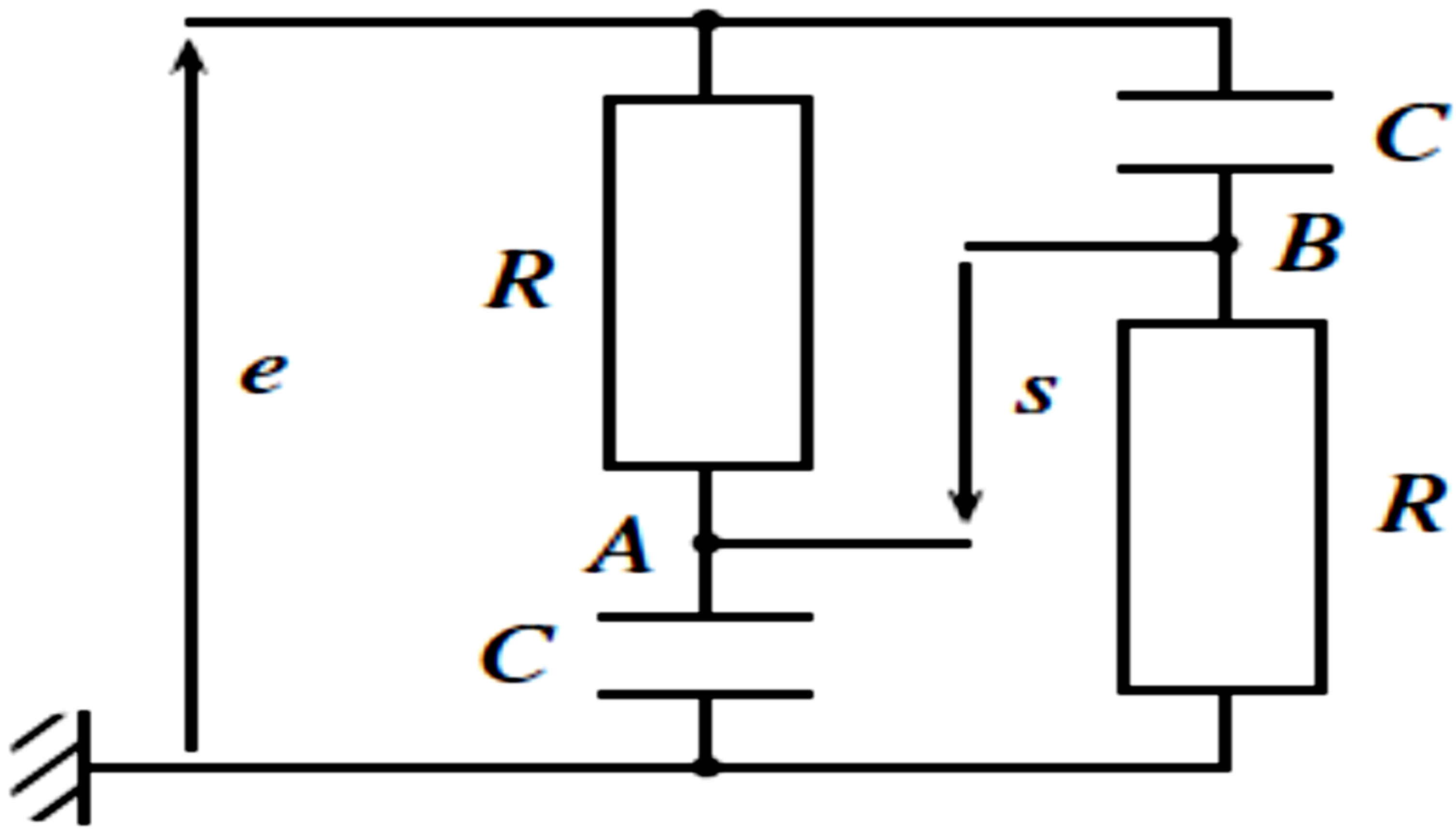
$$\underline{V}_S = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{V}_A = \frac{jx}{1 + jx}\underline{V}_A$$

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_e}{R} + \frac{\underline{V}_S}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{\underline{V}_e + \underline{V}_S}{2 + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{\underline{V}_e + \underline{V}_S}{2 + \frac{1}{jx}}$$

$$\boldsymbol{\underline{H}(jx) = \frac{(jx)^2}{1 - x^2 + 3jx}}$$

la pulsation de coupure : $\omega_c = 0{,}374\omega_0$

Filtre passe-tout déphaseur (1)



Filtre passe-tout déphaseur (2)

❑ Fonction de transfert

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}$$

$$\underline{V}_B = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}$$

$$\underline{s}(t) = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = 1/RC$, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}}$$

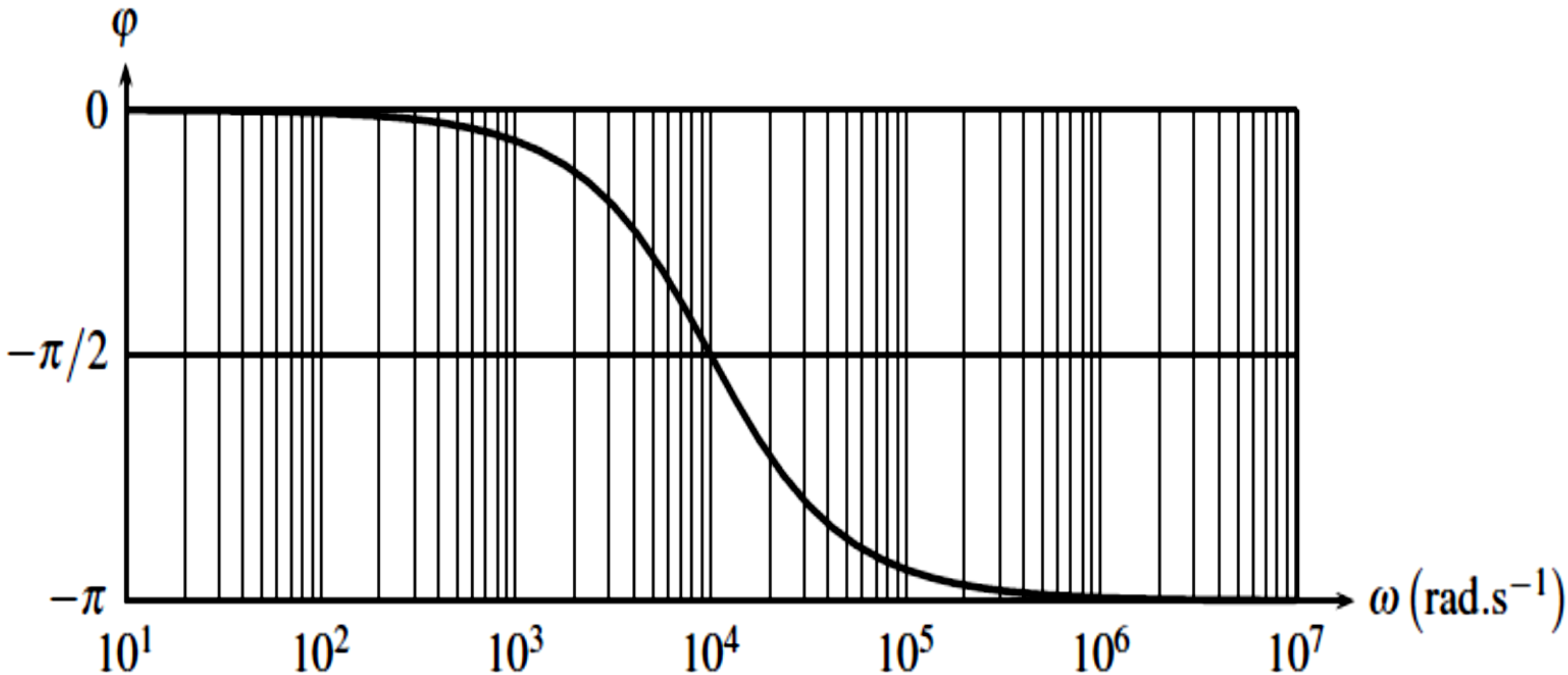
En introduisant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ ou la fréquence réduite $x = f/f_0$, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jx}{1 + jx}}}$$

Filtre passe-tout déphaseur (3)

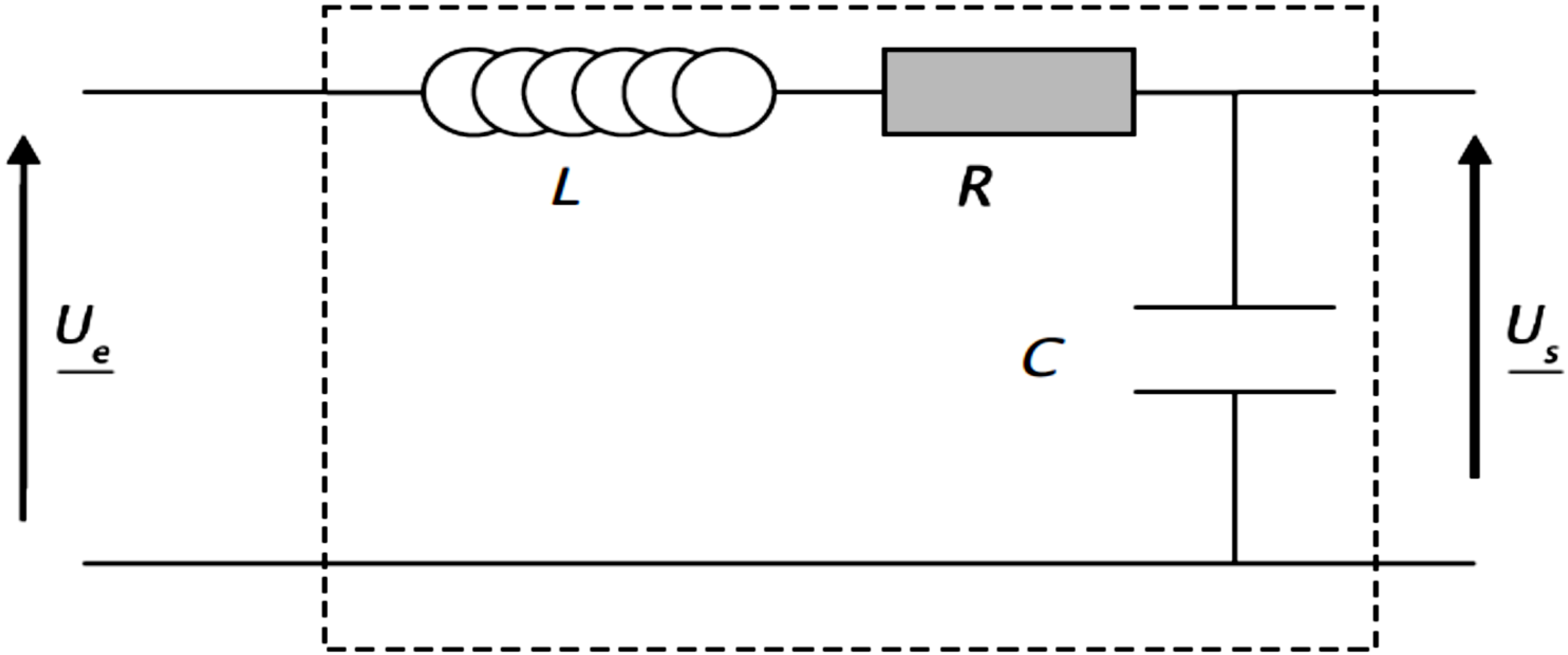
Domaine de Pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Numérateur	1	$1-j$	$-j\dfrac{\omega}{\omega_0}$
Dénominateur	1	$1+j$	$j\dfrac{\omega}{\omega_0}$
$\underline{H}(j\omega)$	1	$\dfrac{1-j}{1+j}$	-1
$G_{dB} = 20\log\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert$	0	0	0
Pente pour G_{dB}	demi-droite confondue avec l'axe des abscisses		demi-droite confondue avec l'axe des abscisses
φ	0	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\pi$
Pente pour φ	demi-droite confondue avec l'axe des abscisses		demi-droite d'ordonnée $-\pi$

Filtre passe-tout déphaseur (4)



Filtres du 2nd Ordre

Filtre passe-bas (1)



Filtre passe-bas (2)

❑ Comportement asymptotique

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow \infty$
- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow 0$

le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance ainsi $\underline{u}_s = \underline{u}_e$

- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$
- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow \infty$

le condensateur se comporte comme un fil sans résistance interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur ainsi $\underline{u}_s = 0$

On peut donc dire que le filtre transmet les signaux de basses fréquences et atténue ceux de hautes fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

Filtre passe-bas (3)

❑ Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

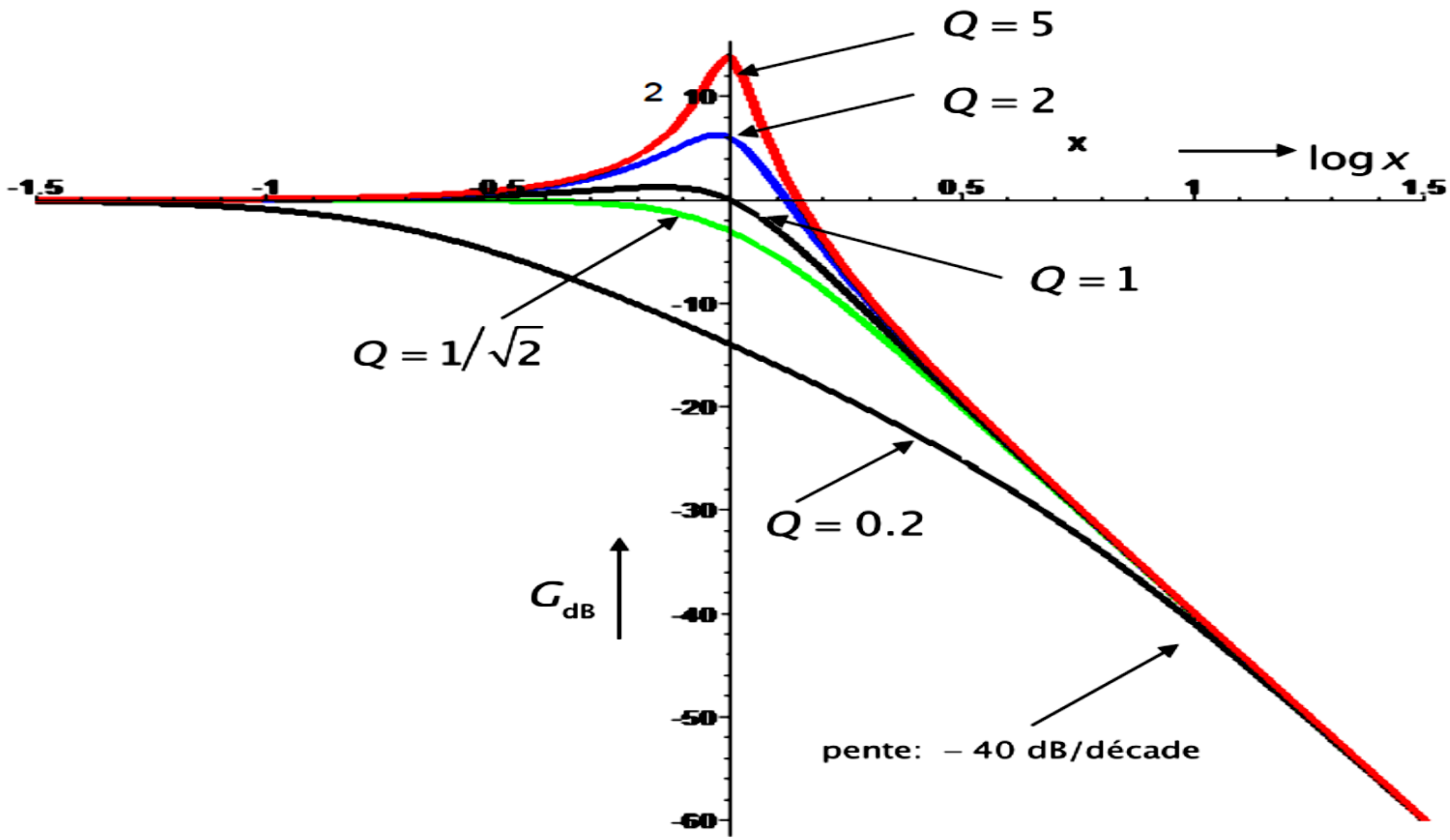
Ecriture canonique de la fonction de transfert **d'un filtre passe-bas de 2nd ordre**:

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

Filtre passe-bas (4)

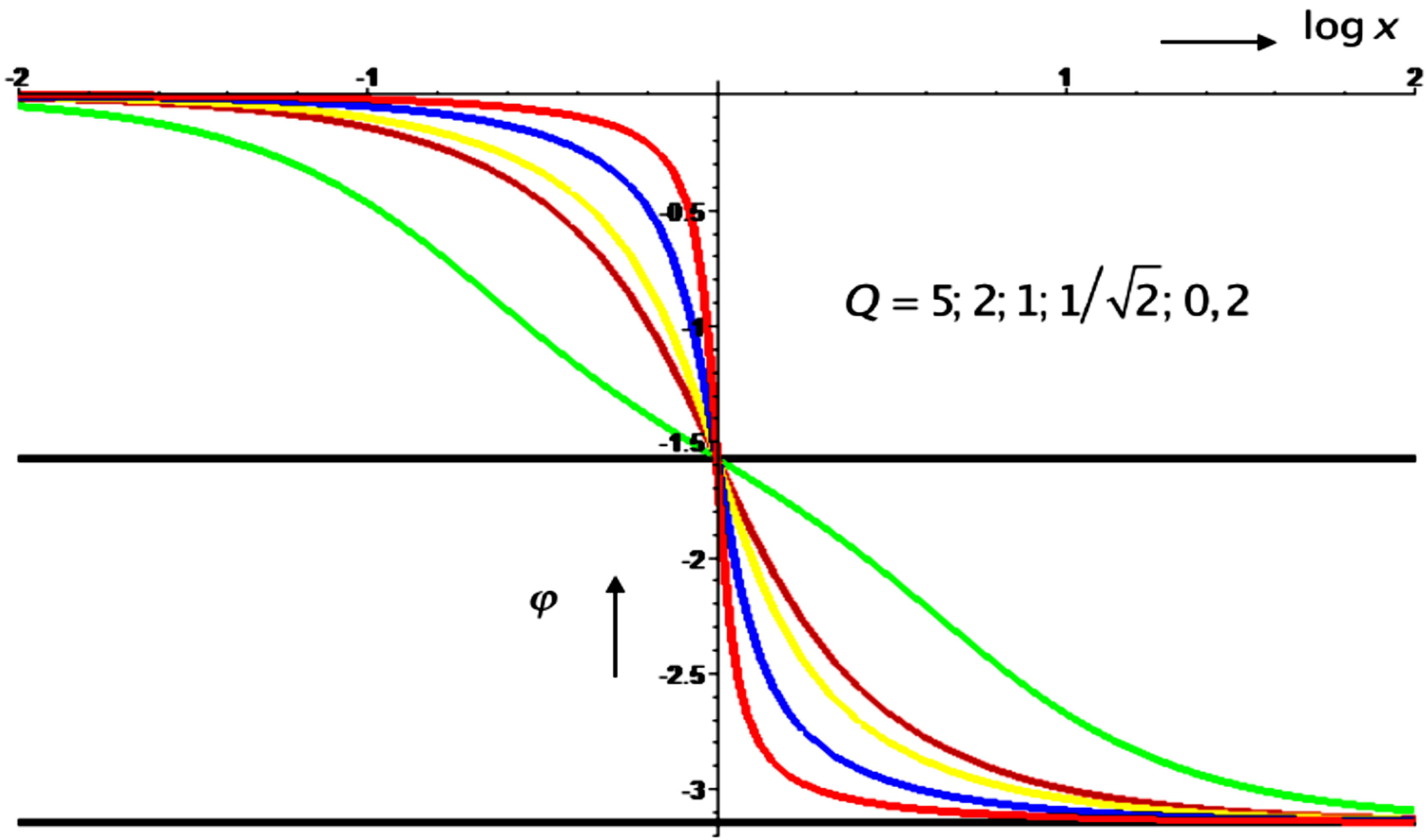
Domaine de Pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Numérateur	1	1	1
Dénominateur	1	$\dfrac{j}{Q}$	$\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
$\underline{H}(j\omega)$	1	$\dfrac{Q}{j}$	$\dfrac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
$G_{dB} = 20\log\left\lvert\underline{H}(j\omega)\right\rvert$	0	$20\log Q$	$-40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$
Pente pour G_{dB}	demi-droite confondue avec l'axe des abscisses		$-40dB/décade$
φ	0	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\pi$
Pente pour φ	demi-droite confondue avec l'axe des abscisses		demi-droite d'ordonnée $-\pi$

Filtre passe-bas (5)



La pente de l'asymptote est deux fois plus importante que pour un filtre d'ordre 1, les hautes fréquences sont beaucoup plus atténuées, **le filtre est plus sélectif**, c'est l'intérêt d'un filtre du deuxième ordre.

Filtre passe-bas (6)



Filtre passe-bas (7)

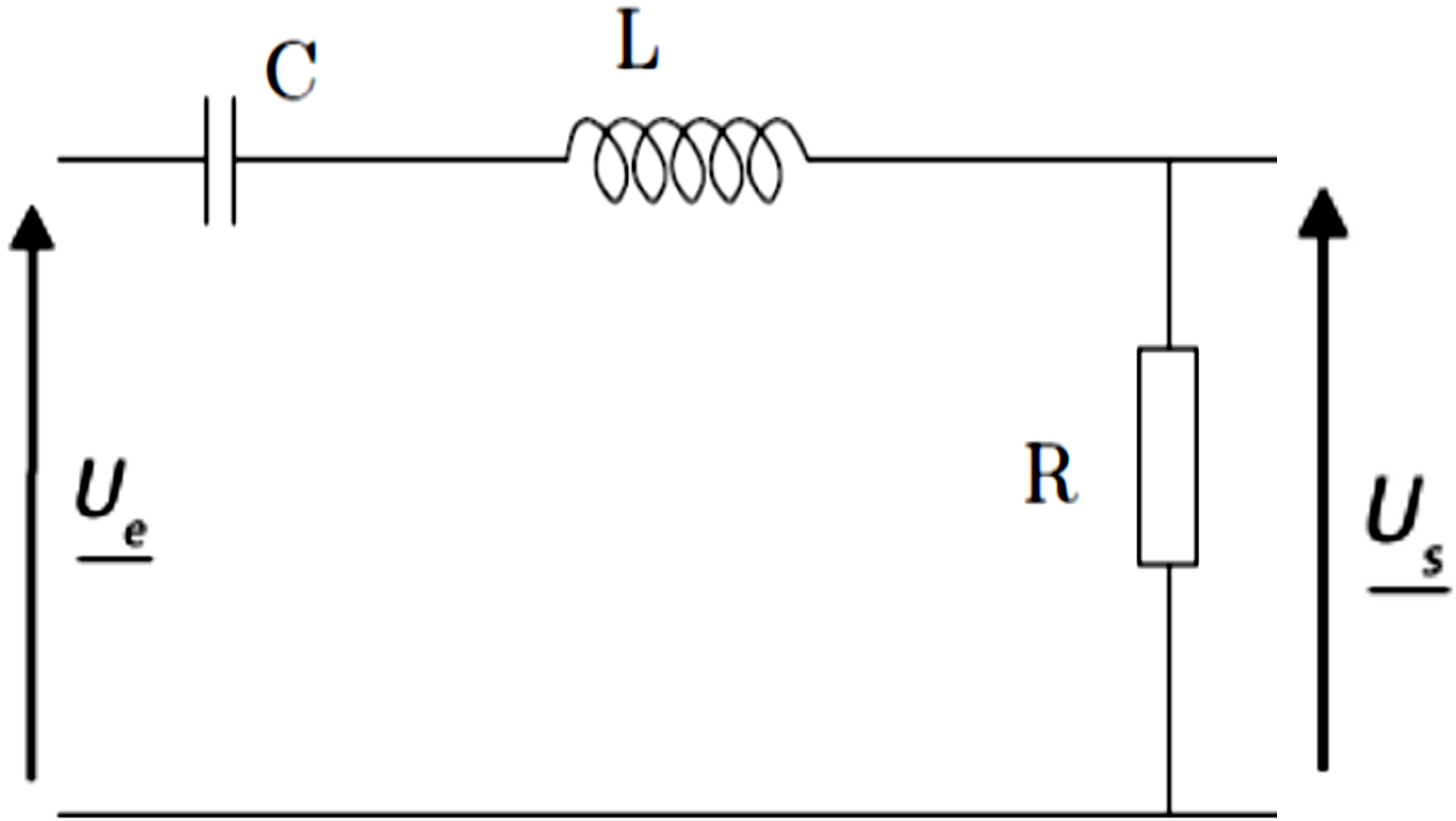
<u>En Hautes Fréquences</u>

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \omega_0^2 \frac{1}{(j\omega)^2}\underline{u}_e$$

$$\underline{u}_s = \omega_0^2 \frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{j\omega}\underline{u}_e\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_s = \omega_0^2 \int\left[\int u_e dt\right] dt}}$$

On constate que le filtre réalise la double intégration du signal d'entrée, on a donc **un double intégrateur**.

Filtre passe-bande (1)



Filtre passe-bande (2)

❑ Comportement asymptotique

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow \infty$
- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow 0$

le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance ainsi $\underline{u}_s = 0$

- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$
- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow \infty$

le condensateur se comporte comme un fil sans résistance interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur ainsi $\underline{u}_s = 0$

On peut donc dire que le filtre atténue les signaux de basses fréquences et ceux de hautes fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

Filtre passe-bande (3)

- **Fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

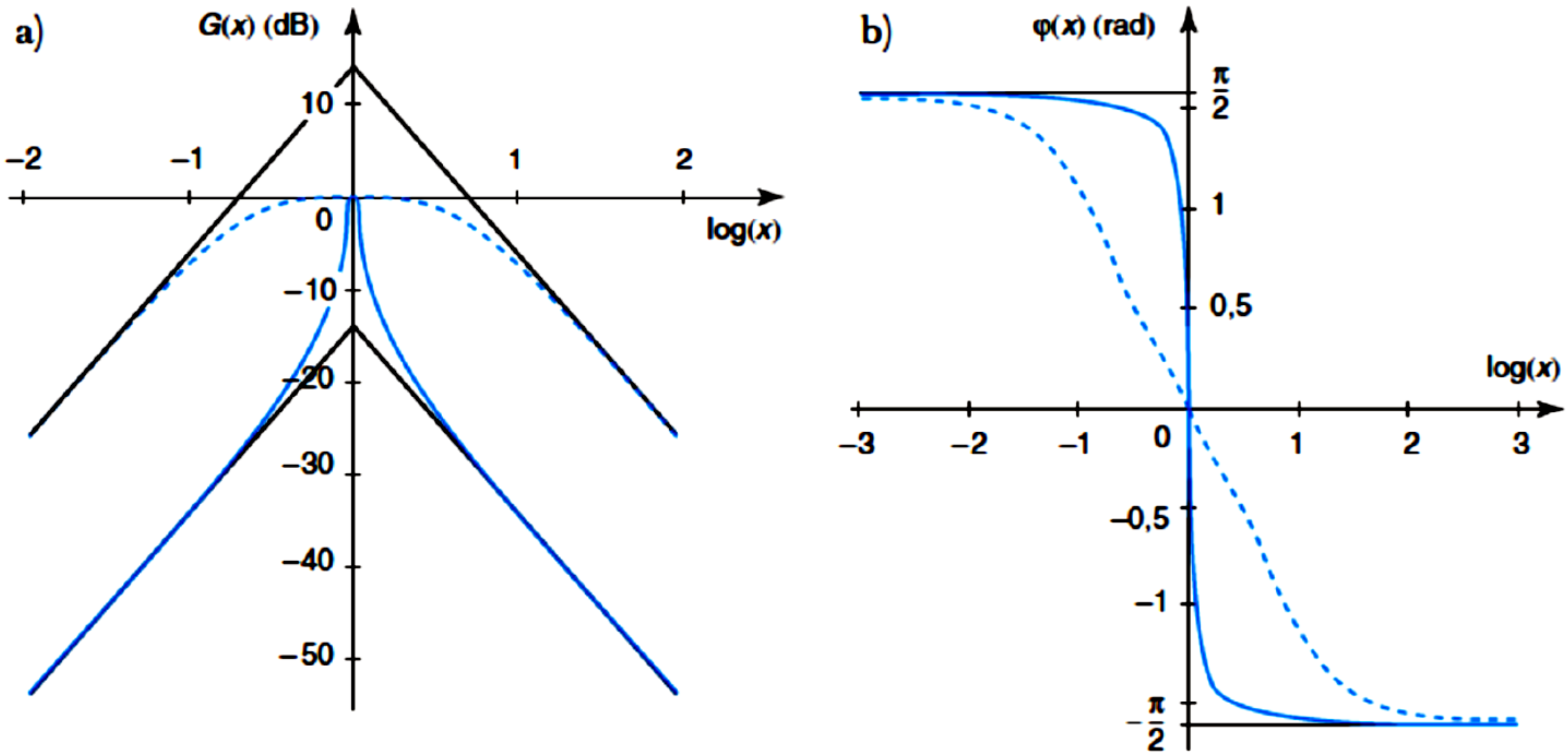
Ecriture canonique de la fonction de transfert **d'un filtre passe-bande de 2nd ordre:**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0\, j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

Filtre passe-bande (4)

Domaine de Pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Numérateur	$j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}$	$\dfrac{j}{Q}$	$j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}$
Dénominateur	1	$j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}$	$\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
$\underline{H}(j\omega)$	$j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}$	1	$\dfrac{1}{Qj\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
$G_{dB} = 20\log\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert$	$-20\log Q + 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	0	$-20\log Q - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$
Pente pour G_{dB}	$+20dB/décade$		$-20dB/décade$
φ	$\dfrac{\pi}{2}$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$
Pente pour φ	demi-droite d'ordonnée $\dfrac{\pi}{2}$		demi-droite d'ordonnée $-\dfrac{\pi}{2}$

Filtre passe-bande (5)



a) Courbe de réponse en gain (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).
b) Courbe de réponse en phase (en couleur) et diagramme asymptotique (en noir).
Courbes en traits pleins pour $Q = 0{,}2$; courbes en traits pointillés pour $Q = 5$.

Filtre passe-bande (6)

La bande passante à -3 dB est définie par

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 1 \Longrightarrow Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}} \\ \boldsymbol{x_2 = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}} \end{cases}} \qquad \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}}$$

Plus Q est grand, plus le filtre est sélectif

Filtre passe-bande (6)

En Basses fréquences

$$\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{Q\omega_0} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = j\frac{\omega}{Q\omega_0}\underline{u}_e \Rightarrow \underline{u}_s = \frac{1}{Q\omega_0}j\omega\underline{u}_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_s = \frac{1}{Q\omega_0}\frac{du_e}{dt}}}$$

On constate que le filtre réalise la dérivation du signal d'entrée, on a donc **un dérivateur**.

Filtre passe-bande (7)

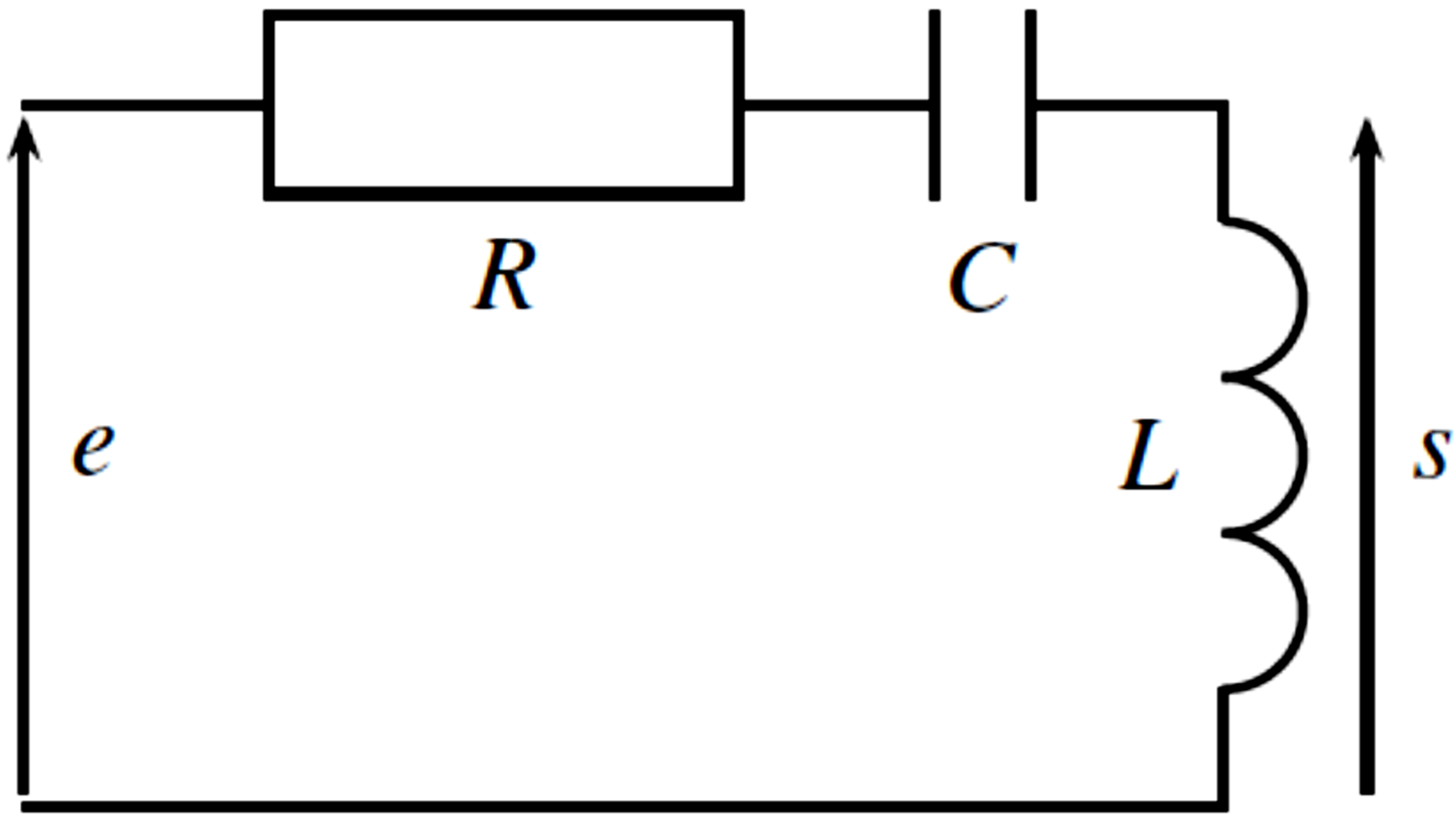
<u>En Hautes Fréquences</u>

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \frac{\omega_0}{Qj\omega}\underline{u}_e \Rightarrow j\omega\underline{u}_s = \frac{\omega_0}{Q}\underline{u}_e$$

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\omega_0}{Q}u_e \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_s = \frac{\omega_0}{Q}\int u_e dt}}$$

On constate que le filtre réalise l'intégration du signal d'entrée, on a donc **un intégrateur**.

Filtre passe-haut (1)



Filtre passe-haut (2)

❑ Comportement asymptotique

- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow \infty$
- Si $\omega \longrightarrow 0$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow 0$

le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance ainsi $\underline{s} = 0$

- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_C| \longrightarrow 0$
- Si $\omega \longrightarrow \infty$ alors $|\underline{Z}_L| \longrightarrow \infty$

le condensateur se comporte comme un fil sans résistance interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur ainsi $\underline{s} = \underline{e}$

On peut donc dire que le filtre atténue les signaux de basses fréquences et laisse passer ceux de hautes fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

Filtre passe-haut (3)

❑ Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{LC(j\omega)^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(j\boldsymbol{\omega}) = \frac{\left(j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_0}\right)^2}{1 + \left(j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_0}\right)^2 + j\frac{\boldsymbol{\omega}}{Q\boldsymbol{\omega}_0}}}$$

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(j\boldsymbol{\omega}) = \frac{(jx)^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

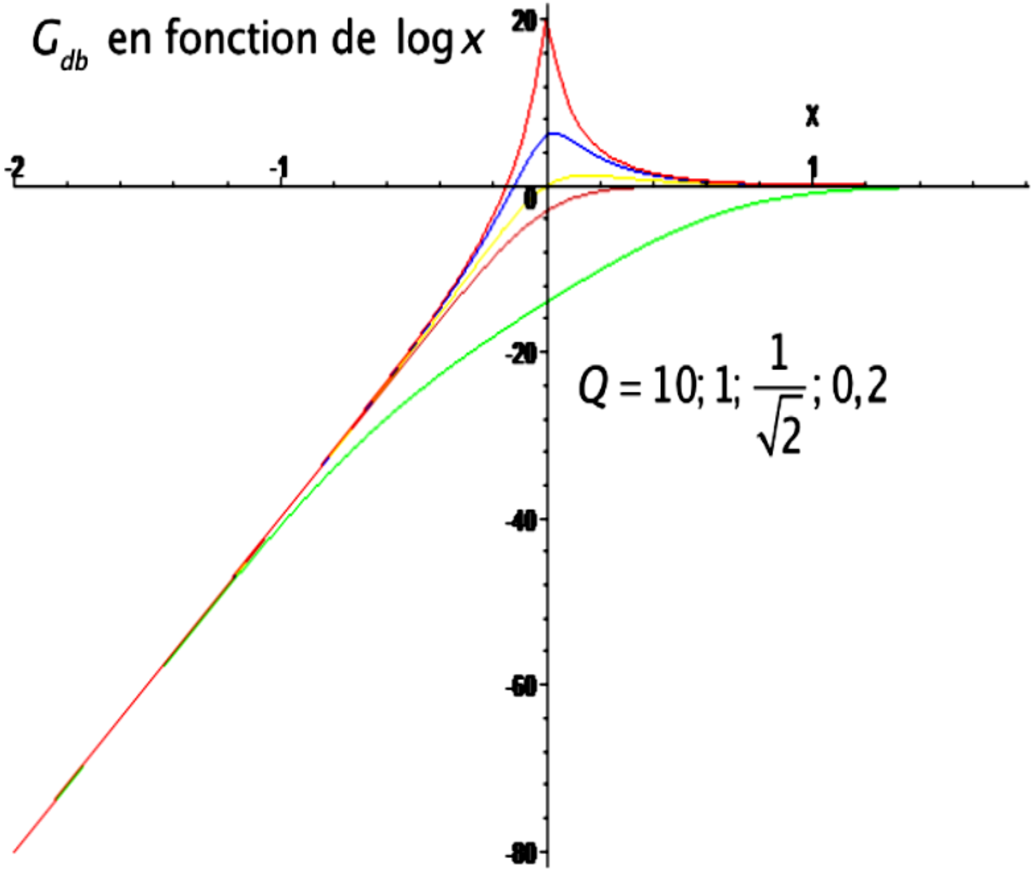
Ecriture canonique de la fonction de transfert **d'un filtre passe-haut de 2nd ordre**:

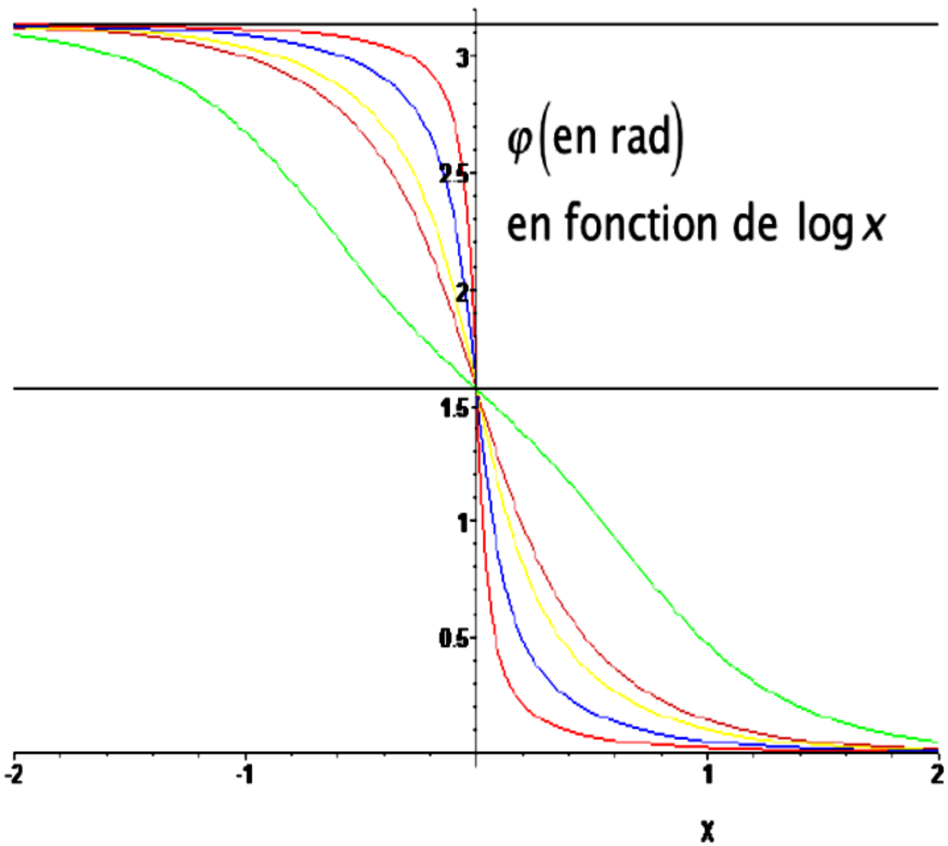
$$\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(j\boldsymbol{\omega}) = \frac{\boldsymbol{H_0}\left(j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_0}\right)^2}{\boldsymbol{1} + \left(j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_0}\right)^2 + j\frac{\boldsymbol{\omega}}{Q\boldsymbol{\omega}_0}}}$$

Filtre passe-haut (4)

Domaine de Pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Numérateur	$\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$	-1	$\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
Dénominateur	1	$\dfrac{j}{Q}$	$\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
$\underline{H}(j\omega)$	$\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$	$-\dfrac{Q}{j}$	1
$G_{dB} = 20\log\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert$	$40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	$20\log Q$	0
Pente pour G_{dB}	$+40dB/décade$		0
φ	π	$\dfrac{\pi}{2}$	0
Pente pour φ	demi-droite d'ordonnée π		demi-droite confondue avec l'axe des abscisses

Filtre passe-haut (5)





Filtre passe-haut (5)

En Basses fréquences

$$\underline{H}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \underline{u}_s = \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2\,\underline{u}_e$$

$$\Rightarrow \boxed{u_s = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u_e}{dt^2}}$$

On constate que le filtre réalise la double dérivation du signal d'entrée, on a donc **un double dérivateur**.